

Feuille d'exercices n°16 : Applications linéaires

PTSI B Lycée Eiffel

27 mars 2014

Exercice 0 (*)

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer pour chacune des applications $\varphi : E \rightarrow E$ définies par $\varphi(f) = g$ si elles sont linéaires ou non :

- $g(x) = \int_0^x f(t) dt$
- $g(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$
- $g(x) = \int_0^x f(t^2) dt$
- $g(x) = x^2 \int_0^x f(t) dt$
- $g(x) = f''(x)$
- $g(x) = f''(x^2)$
- $g(x) = f''(x)^2$
- $g(x) = f''(0)x^2$
- $g(x) = f''(x) + x \int_0^x f'(t) dt$
- $g(x) = \int_0^x f(t) dt f'(t)$

Exercice 1 (*)

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que les images des vecteurs de la base canonique soient $(1, -1, 2)$, $(-3, 2, -1)$ et $(-7, 4, 1)$.

1. Déterminer une expression explicite de u .
2. Déterminer les antécédents par u de $(-1, 1, 8)$ et de $(-2, 1, 3)$.
3. u est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 2 (***)

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $u^2 = 0$. Montrer que $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$, et que $id_E + u$ est un automorphisme.
2. Dans le cas général, montrer que $\text{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(u^2) = \ker(u)$; et que $\ker(u) + \text{Im}(u) = E \Leftrightarrow \text{Im}(u^2) = \text{Im}(u)$.

Exercice 3 (**)

On considère \mathbb{C} comme un \mathbb{R} -espace vectoriel, et on définit l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(z) = z + a\bar{z}$, où a est un nombre complexe fixé. Montrer que f est linéaire, Déterminer son noyau, et donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit bijective.

Exercice 4 (**)

On se place dans \mathbb{R}^3 et on note $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $G = \{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 0\}$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et déterminer l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G et de la symétrie par rapport à G parallèlement à F .

Exercice 5 (*)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z; \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z; \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \right)$. Montrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques (noyau et image).

Exercice 6 (***)

Soient p et q deux projecteurs dans un même espace vectoriel E , vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.
3. Montrer que $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$.

Exercice 7 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. On pose, pour tout entier naturel n , $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite (N_k) est croissante et la suite (I_k) décroissante (au sens de l'inclusion des ensembles).
2. Montrer qu'il existe un entier p pour lequel $N_p = N_{p+1}$, puis que la suite (N_k) stationne à partir du rang p .
3. Montrer que la suite (I_k) stationne à partir du même rang p .
4. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.

Exercice 8 (***)

On se place dans $\mathbb{C}_3[X]$, et on note $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. On désigne par f l'application qui, à un polynôme P , associe le reste de la division de AP par B .

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.
2. Déterminer le noyau de f .
3. Quelle est la dimension de $\text{Im}(f)$? Montrer que $\text{Im}(f) = (X - 1)\mathbb{C}_2[X]$.
4. Déterminer les quatre racines z_1, z_2, z_3 et z_4 de B .
5. Montrer qu'en posant $P_k = \frac{B}{X - z_k}$, la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.
6. Montrer que $f(P_k) = (z_k - 1)P_k$.

Exercice 9 (**)

Soit $f \in \mathcal{E}$ un endomorphisme nilpotent, où E est de dimension finie n .

1. Montrer que $\ker(f) \neq \{0\}$, et que $\operatorname{rg}(f) \leq n - 1$.
2. Soit p le plus petit entier pour lequel $f^p = 0$. Prouver qu'il existe un $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$, et montrer que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est une famille libre.
3. En déduire que $p \leq n$ et que $f^n = 0$.
4. On suppose que $p = n$. Déterminer toutes les applications linéaires commutant avec f .

Exercice 10 (**)

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par : $\forall P \in E, \varphi(P) = 2P - (X - 1)P'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Montrer que $\ker(\varphi)$ est une droite vectorielle dont on précisera une base. L'endomorphisme φ est-il injectif?
3. Montrer que $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}(1, X)$.
4. Montrer que $\ker(\varphi) \oplus \operatorname{Im}(\varphi) = E$.
5. Soit p la projection vectorielle sur $\ker(\varphi)$ de direction $\operatorname{Im}(\varphi)$. Que valent $\varphi \circ p$ et $p \circ \varphi$?

Exercice 11 (*)

On considère \mathbb{C} comme un espace vectoriel réel, et on note φ l'application définie sur \mathbb{C} par $\varphi(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de \mathbb{C} .
2. Montrer que φ est un projecteur.
3. Déterminer l'image et le noyau de φ , ainsi que leurs dimensions.

Exercice 12 (**)

On pose $E = R[X]$ et, pour tout $P \in E, f(P) = P - XP'$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y - xy' = 1$. Possède-t-elle des solutions sur \mathbb{R} ?
2. Prouver que f est un endomorphisme de E .
3. Déterminer son noyau. L'application f est-elle injective?
4. L'application f est-elle surjective?
5. L'application $f \circ f$ est-elle injective? Surjective? Déterminer $\ker(f \circ f)$.