Cadeau de Noël (DM facultatif)

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 6 janvier 2014

Exercice 1

Déterminer trois entiers naturels distincts a, b et c tels que $\frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Trouver tous les entiers n pour lesquels il existe n entiers distincts ou non $a_1, \dots, a_n$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} = 1$.

Exercice 2

On note dans cet exercice $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité complexes. On cherche à déterminer une condition sur n pour qu'il existe une fonction $f : \mathbb{U}_{2n} \to \mathbb{U}_{2n}$ vérifiant $f \circ f(z) = z^2$.

1. On suppose qu'une telle fonction existe. Vérifier alors que, $\forall z \in \mathbb{U}_{2n}$, $f(z^2) = (f(z))^2$, et que $f(z) = f(z') \Rightarrow z = \pm z'$.
2. Vérifier que, s'il existe un z dans $\mathbb{U}_{2n}$ tel que $z^2 = -1$, le problème n'a pas de solution. Quand cela se produit-il ?
3. Même question s'il existe un $z \neq 1$ pour lequel $z^3 = 1$.
4. Montrer que, si n est un entier impair, l'existence d'une fonction $f : \mathbb{U}_{2n} \mapsto \mathbb{U}_{2n}$ solution est équivalente à l'existence d'une fonction $g : \mathbb{U}_n \mapsto \mathbb{U}_n$ vérifiant la même hypothèse ($g \circ g$ est la fonction carré).
5. Préciser s'il existe un solution pour $n = 5$, $n = 7$ et $n = 9$, et le cas échéant, en donner une.

Exercice 3

On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ vérifiant $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, et telles que $f(0) = 1$ et $\lim_{x \to 0} \frac{1 - f(x)}{x^2}$ existe (on notera a cette limite si besoin).

1. Vérifier que $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.
2. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, prouver que $\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x)$ et $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{\pi}$.
3. Soit f une fonction solution du problème. En notant θ_n un réel tel que $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n)$, étudier la suite (θ_n) (pour un x fixé) et en déduire f.