Chapitre 16 : Applications linéaires

PTSI B Lycée Eiffel

27 mars 2014

J'ai simplement pensé à l'idée d'une projection, d'une quatrième dimension invisible, autrement dit que tout objet de trois dimensions, que nous voyons froidement, est une projection d'une chose à quatre dimensions, que nous ne connaissons pas.

Marcel Duchamp

Un mathématicien et un ingénieur assistent à une conférence sur les processus physiques intervenant dans les espaces de dimension 9*. Le mathématicien est assis et apprécie beaucoup la conférence, pendant que l'ingénieur fronce les sourcils et semble complètement embrouillé. À la fin, l'ingénieur demande au matheux : « Comment fais-tu pour comprendre tout cela ? » « C'est simple ! D'abord tu visualises le processus en dimension* n*, et ensuite il suffit de prendre* $n = 9$*. »*

Introduction

Ce deuxième chapître d'algèbre linéaire sera un simple complément du premier, permettant de présenter une notion complètement fondamentale, celle d'application linéaire, qui va éclairer d'un jour nouveau tous les termes vus depuis le début de l'année et faisant intervenir ce fameux mot « linéaire ». En gros, les applications sont des applications « naturelles » dans les espaces vectoriels, qui apparaissent dans tous les domaines des mathématiques, et pour lesquels une étude tout à fait générale et théorique est possible, ce qui permet d'appréhender un peu mieux la puissance de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de maths très divers. Ce petit chapître sera essentiellement constitué de vocabulaire, les quelques calculs à savoir faire se résumant la plupart du temps à des résolutions de petits systèmes (linéaires, cela va de soit !).

Objectifs du chapitre :

- maîtriser tout le vocabulaire introduit dans ce chapître.
- comprendre l'intérêt du théorème du rang.

1 Noyau et image

Définition 1. Soient E et F deux espaces vectoriels, une **application linéaire** de E dans F est une application $f : E \to F$ vérifiant les conditions suivantes :
- $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Remarque 1. Autrement dit, une application linéaire est une application compatible avec les deux opérations définissant la structure d'espace vectoriel.

Proposition 1. Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall(x, y) \in E^2$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Démonstration. Si f vérifie les conditions de la définition, alors $f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x)+\mu f(y)$ en utilisant successivement les deux propriétés. Réciproquement, en prenant $\lambda = \mu = 1$, on retrouve la première condition ; et en prenant $y = 0$ (qui, rappelons-le, a forcément une image nulle par un morphisme de groupes), on retrouve la deuxième. □

Remarque 2. Autrement dit, une application est linéaire si elle est compatible avec les combinaisons linéaires. On a d'ailleurs plus généralement, pour une application linéaire, $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(e_i)$.

Exemples : On pourrait penser que les conditions définissant une application linéaire sont restrictives, et qu'il va donc y avoir « peu » d'applications linéaires. C'est vrai si on se restreint à des espaces donnés très simples. Par exemple, les seules applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions $f : x \mapsto ax$, celles que vous avez justement appelées linéaires il y a quelques années ! Mais la grande variété des ensembles étant munis d'une structure d'espace vectoriel fait qu'il y a en fait énormément d'applications linéaires, très variées, que nous avons déjà pour beaucoup d'entre elles croisées depuis le début de l'année.

- L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x - 3y, 4x + y, -x + 2y)$ est une application linéaire.
- L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x-3, 4+y, -x+2y)$ n'est pas une application linéaire (on peut constater par exemple qu'en général $f(2x, 2y) \neq 2f(x, y)$).
- L'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$ est une application linéaire, quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- L'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$ n'est pas une application linéaire (en général, $(M + N)^2 \neq M^2 + N^2$).
- Soit E l'ensemble des suites réelles. L'application $f : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(u_n) = (u_0, u_8, u_{35})$ est une application linéaire.
- Soit E l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application $f : E \to E$ définie par $f(g) = g'$ est une application linéaire (dont la variable est une fonction !).
- Soit E l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0; 1]$. L'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(g) = \int_0^1 g(t)\, dt$ est une application linéaire.
- L'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[x]$ définie par $f(P) = 2X^2P'' - XP'$ est une application linéaire (ici, il faut bien faire attention quand on vérifie la linéarité à vérifier que $f(\lambda P+\mu Q) = \lambda f(P)+ \mu f(Q)$, il n'y absolument aucune raison de mettre des coefficients λ et μ sur l'indeterminée X à l'intérieur du polynôme).

Définition 2. Une application linéaire $f : E \to F$ est aussi appelée **morphisme** de E dans F. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F.
Une application linéaire $f : E \to E$ est appelée **endomorphisme** de l'espace vectoriel E. On note plus simplement $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Une application linéaire bijective est appelées **isomorphisme**.
Un endomorphisme bijectif est appelée **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes d'un ev E est noté $GL(E)$.

Proposition 2. Si E et F sont deux espaces vectoriels réels, c'est aussi le cas de $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration. La somme de deux applications linéaires est linéaire, l'élement neutre étant l'application nulle, et l'opposé d'une application linéaire étant toujours défini. De plus, les produits par des constantes d'applications linéaires sont linéaires, et les relations de distributivité sont immédiates. □

Définition 3. Le **noyau** d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble $\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$.
L'**image** d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$.

Remarque 3. Les lettres Ker sont les premières du mot allemand Kernel qui signifie, comme vous auriez pu le deviner, noyau.

Proposition 3. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors l'image d'un sous-espace vectoriel de E est toujours un sous-espace vectoriel de F ; et l'image réciproque de tout sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Corollaire 1. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Soit G un sous-espace vectoriel de E, et $(x, y) \in f(G)^2$, alors $x = f(z)$ et $y = f(w)$, avec $(z, w) \in G^2$. Comme l'application est linéaire, $\lambda x + \mu y = \lambda f(z) + \mu f(w) = f(\lambda z + \mu w) \in f(G)$ puisque $\lambda z + \mu w \in G$ en tant que combinaison linéaire d'éléments du sous-espace vectoriel G. L'image de G est donc stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de G. C'est le même principe pour l'image réciproque : soit H un sous-espace vectoriel de F, et $(z, w) \in f^{-1}(H)$, alors $f(z) = x \in H$ et $f(w) = y \in H$, donc $f(\lambda z + \mu w) = \lambda x + \mu y \in H$, et $\lambda z + \mu w \in f^{-1}(H)$. □

Exemple : Déterminons le noyau de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $(x, y, z) \mapsto (x - y + z, 3x - 2y + 5z, -x - 3z)$. Les éléments du noyau sont les triplets de réels (x, y, z) solutions du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 5z & = & 0 \\ -x & & & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$. Le système n'est pas de Cramer ($2L_1 - L_2 = L_3$), les solutions sont les triplets de la forme $(-3z, -2z, z)$, avec $z \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $\ker(f) = \mathrm{Vect}((-3, -2, 1))$.

Exemple 2 : L'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P'$ a pour noyau l'ensemble des polynômes constants.

Proposition 4. Une application linéaire f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$. Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. La deuxième propriété est évidente, c'est la définition de la surjectivité. Démontrons donc la première, qui est beaucoup plus intéressante puisqu'elle revient à dire que, pour démontrer qu'une application linéaire est injective, il suffit de démontrer qu'un seul élément bien particulier n'a pas plus d'un antécédent par f. Supposons d'abord le noyau réduit au vecteur nul et montrons que f est injective : soient $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$, alors $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$, donc $x - y \in \ker(f)$, donc $x - y = 0$, c'est-à-dire $x = y$, ce qui prouve bien l'injectivité. Réciproquement, supposons f injective, alors 0 a un seul antécédent par f. Or, le vecteur nul est toujours un antécédent de 0 par une application linéaire. Ceci prouve bien qu'il est le seul élément de E à appartenir à $\ker(f)$. □

Proposition 5. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Démonstration. Comme les vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ appartiennent évidemment à $\mathrm{Im}(f)$, on a nécessairement $\mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \subset \mathrm{Im}(f)$. De plus, si $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors $y = f(x)$ avec $x \in E$, et comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$. Alors $y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(e_i)$, donc $y \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$, et les deux ensembles sont bien égaux. □

Remarque 4. Attention, en général, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ n'est pas une base de $\mathrm{Im}(f)$, mais seulement une famille génératrice. Remarquons également qu'une application linéaire est parfaitement déterminée par la simple donnée des images des vecteurs d'une base, puisqu'on peut reconstituer toutes les autres images par combinaisons linéaires.

Exemple 1 : La méthode élémentaire pour calculer une image est d'utilser la définition. Prenons par exemple l'applicaton linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (2x - y, x + 2y, -2x + y)$. Un triplet (a,b,c) appartient à $Im(f)$ si et seulement si le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & a \\ x & + & 2y & = & b \\ -2x & + & y & = & c \end{array}\right.$$

admet une solution. Les membres de gauche des deux équations extrêmes étant opposés, il faut nécessairement avoir $a = -c$, et on vérifie facilement que cette condition est suffisante. On a donc $\mathrm{Im}(f) = \{(a,b,-a) \mid a,b \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1,0,-1);(0,1,0))$.

Exemple 2 : En pratique, on utilisera plutôt notre dernière proposition, car c'est beaucoup plus rapide ! Reprenons le même exemple. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est constituée des deux vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$, donc l'image est engendrée par $f(1,0) = (2,1,-2)$ et $f(0,1) = (-1,2,1)$. On a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((2,1,-2);(-1,2,1))$ (ce ne sont pas les mêmes vecteurs que tout à l'heure mais on peut vérifier qu'ils engendrent le même espace vectoriel).

Proposition 6. Si f est un isomorphisme de E dans F, alors sa réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration. La seule chose à vérifier est que la réciproque est une application linéaire. Soient donc $(z,w) \in F^2$ et notons $x = f^{-1}(z)$ et $y = f^{-1}(w)$. Par linéarité de f, on peut dire que $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda z + \mu w$, donc $f^{-1}(\lambda z + \mu w) = \lambda x + \mu y = \lambda f^{-1}(z) + \mu f^{-1}(w)$, ce qui prouve la linéarité de f^{-1}. $\square$

Remarque 5. L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ muni des deux opérations $+$ et $\circ$ est ce qu'on appelle un anneau non commutatif. L'addition joue son rôle usuel et la composition joue à peu de choses près le rôle de la multiplication dans les ensembles de nombres usuels ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple). En effet, la composition admet un élément neutre qui est l'application identité, mais toutes les applications linéaires ne sont pas inversibles (seuls les automorphismes le sont), et surtout la composition est distributive par rapport à l'addition, tout comme le produit dans les ensembles de nombres. En fait, nous verrons plus loin que la composition d'applications linéaires s'identifie effectivement à un produit, celui des matrices. Pour l'instant, nous utiliserons déjà cette analogie pour justifier l'énorme abus de notation suivant : pour une application linéaire, on notera $f \circ f = f^2$ (un carré au sens « produit » n'aurait en général aucun sens), et plus général f^n la composée de f n fois par elle-même.

2 Rang

Définition 4. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, on appelle **rang de la famille** $\mathcal{F}$ la dimension de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Remarque 6. La famille est libre si et seulement si son rang est égal au nombre de vecteurs qu'elle contient.

Définition 5. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, le **rang de** f, s'il existe, est la dimension de l'image de f. On le note $\mathrm{rg}(f)$.

Remarque 7. Pour faire le lien avec la définition précédente, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base quelconque de E. Pour être très rigoureux, cette égalité ne peut avoir de sens que si E est de dimension finie, alors que le rang de f peut être défini même si E n'est pas de dimension finie.

Théorème 1. Théorème du rang.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, alors $\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$.

Remarque 8. Le théorème du rang n'affirme absolument pas que le noyau et l'image de f sont supplémentaires, c'est faux en général (voir l'exemple suivant la démonstration).

Démonstration. L'idée est de démontrer qu'à défaut d'être supplémentaire de $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\ker(f)$ (et donc a la même dimension, ce qui prouve immédiatement le théorème). Soit donc G un supplémentaire de $\ker(f)$ (dont l'existence est assurée, rappelons-le, par le théorème de la base incomplète). Montrons que $f_{|G}$ est un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}(f)$. Soit $x \in \ker(f_{|G})$, on a donc $f(x) = 0$, soit $x \in \ker(f)$. Cet espace étant supplémentaire de G, leut intersection est réduite au vecteur nul, donc $x = 0$. Soit maintenant $y \in \mathrm{Im}(f)$, donc $y = f(x)$, avec $x \in E$. Ce vecteur x peut se décomposer en $x_G + x_K$, avec $x_G \in G$ et $x_K \in \ker(f)$. Comme $f(x_K) = 0$, $y = f(x) = f(x_G) \in \mathrm{Im}(f_{|G})$, ce qui prouve que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f_{|G})$. L'aplication f restreinte à G est bel et bien un isomorphisme, le théorème en découle. □

Exemple : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'application linéaire définie par $u(x, y, z, t) = (x-y, x-y, t-z, z-t)$. On constate aisément que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, -1, 0, 0); (0, 0, 1, -1))$ (les images des deux premiers vecteurs de la base canonique sont identiques, celles des deux derniers sont opposées), donc f est de rang 2. La détermination du noyau amène de même à un système constitué de deux paires d'équations identiques, et $\ker(f) = \{(x, -x, z, z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1, -1, 0, 0); (0, 0, 1, 1))$. Le noyau est également de dimension 2 (encore heureux, sinon le théorème du rang serait mis en défaut), mais noyau et image ne sont pas supplémentaires (puisqu'ils contiennent tous deux le vecteur $(1, -1, 0, 0)$, l'intersection est en fait de dimension 1). On peut s'amuser ici à calculer $f^2(x, y, z, t) = (0, 0, 2z-2t, 2t-2z)$. On trouve alors $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Vect}((0, 0, -1, 1))$ et $\ker(f^2) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 1))$. Cette fois-ci, les deux sous-espaces sont supplémentaires. D'ailleurs, les composées suivantes de f ont les mêmes noyaux et images de f^2. On peut prouver plus généralement que, pour tout endormorphisme f d'un espace de dimension finie, les noyaux et images de f^k finissent par se stabiliser sur des sous-espaces supplémentaires.

Corollaire 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, f est bijectif si et seulement si il est injectif ou surjectif.

Démonstration. En effet, si par exemple f est injectif, $\dim(\ker(f)) = 0$, donc en appliquant le théorème du rang $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$, ce qui assure que $\mathrm{Im}(f) = E$, et donc que f est également surjectif. C'est à peu près la même chose si on suppose f surjectif. □

Exemple : La remarque précédente ne s'applique absolument pas en dimension infinie. Si on note f l'application définie sur l'ensemble de toutes les suites réelles par $f(u_n) = v_n$, où $v_n = u_{n+1}$ (décalage de tous les termes de la suite vers la gauche, en supprimant le premier). L'application f est surjective mais pas injective. En fait, en notant $g(u_n) = w_n$, avec $w_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $w_n = u_{n-1}$, on a $f \circ g = \mathrm{id}$, mais $g \circ f \neq \mathrm{id}$ (on transforme le premier terme de la suite en 0). L'application g, quant à elle, est injective mais pas surjective.

Exemple : Soient x_0, x_1, …, x_n des réels deux à deux distincts et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ l'endomorphisme défini par $f(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$. Le noyau de f est réduit au polynôme nul car c'est le seul polynôme de degré inférieur ou égal à n pouvant avoir $n+1$ racines distinctes. Par conséquent, f est un isomorphisme. Cela prouve que, pour tous réels a_0, a_1, …, a_n, il existe un unique polynôme de degré n (au plus) tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $P(x_i) = a_i$. Vous le saviez en fait déjà, il s'agit des polynômes interpolateurs de Lagrange.

Définition 6. Une **forme linéaire** sur un espace vectoriel E est une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Proposition 7. Si E est de dimension finie, le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan de E.

Démonstration. Il n'y a pas beaucoup de choix pour le rang d'une forme linéaire : soit il est nul, et f est alors l'application nulle ; soit il vaut 1, et d'après le théorème du rang on a alors $\dim(\ker(f)) = n - 1$. □

Exemple : La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices de trace nulle est donc un hyperplan (de dimension n^2-1 dans ce cas) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3 Applications linéaires classiques

Nous allons retrouver dans ce paragraphe un premier lien vraiment concret entre algèbre linéaire et géométrie, en étudiant quelques types d'applications linéaires bien particulières, que vous connaissez déjà en géométrie plane depuis longtemps.

Définition 7. Soit E un espace vectoriel réel. L'**homothétie de rapport** λ est l'endomorphisme de E de la forme $\lambda\,\mathrm{id}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque 9. Cela correspond bien à la notion usuelle d'homothétie de rapport λ, toujours centrée en l'origine quand on travaille dans un espace vectoriel.

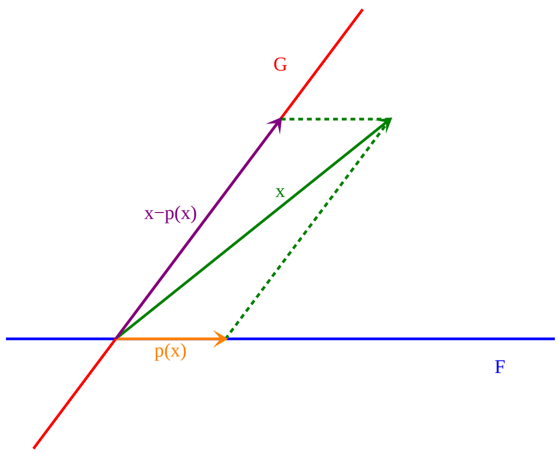
Proposition 8. Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E, son automorphisme réciproque est l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration. Une démonstration à la portée de tous : $(\lambda\,\mathrm{id}) \circ \left(\dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{id}\right) = \mathrm{id}$. □

Remarque 10. En tant que multiples de l'identité, les homothéties commutent avec tous les autres endomorphismes de E. On peut d'ailleurs prouver que ce sont les seules applications linéaires dans ce cas.

Définition 8. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E. La **projection sur** F **parallèlement à** G est l'application linéaire $p : x \mapsto x_F$, où on note, pour tout vecteur $x \in E$, x_F l'élément de F obtenu en décomposant x dans $F \oplus G$. Autrement dit, si $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, alors $p(x) = x_F$.

Remarque 11. L'application est bien linéaire, car la décomposition de $\lambda x + \mu y$ dans $F \oplus G$ est simplement $(\lambda x_F + \mu y_F) + (\lambda x_G + \mu y_G)$. Pour un exemple plus parlant, une projection sur une droite de $\mathbb{R}^2$ parallèlement à une autre droite donne des images construites comme ceci :



Notons qu'il est indispensable de préciser l'espace G parallèlement auquel on projette, il n'y a pour l'instant aucune notion de projection orthogonale dans un espace vectoriel.

Proposition 9. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$, alors p est un projecteur (terme synonyme de projection) si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas, avec les notations de la définition,

- $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$.

- $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
- $x \in \mathrm{Im}(p) \Leftrightarrow p(x) = x$.

Démonstration. Si p est un projecteur, on a effectivement $p(p(x)) = p(x_F) = x_F = p(x)$. Avant de montrer la réciproque, prouvons les autres propriétés, qui sont toutes faciles : si $x \in \ker(p)$, alors $x_F = 0$, ce qui est équivalent à dire que $x = x_G \in G$. De même, $\mathrm{Im}(p) \subset F$ est évident, et tout élément de f est sa propre image par p, donc $\mathrm{Im}(p) = F$. L'égalité $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ découle alors du fait que $E = F \oplus G$. Enfin, $p(x) = x$ équivaut à $x = x_F$, donc $x \in F = \mathrm{Im}(p)$. Revenons alors à notre réciproque : si $p \circ p = p$, notons $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$. On vérifie facilement que F et G sont supplémentaires : d'une part, si $x \in \ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$, alors $x = p(y)$ et $p(x) = 0$, ce qui implique $p \circ p(y) = 0$, donc $p(y) = x = 0$; d'autre part, on peut toujours écrire $x = p(x) + (x - p(x))$, avec $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, et $x - p(x) \in \ker(p)$ puisque $p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = 0$. On peut donc écrire $x = x_K + x_G$, avec $x_F = p(x)$, ce qui prouve bien que p est le projecteur sur F parallèlement à G. □

Exemple : L'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $p(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{2}; \dfrac{x+y}{2}\right)$ est une projection. Le plus simple pour le prouver est de constater que $p \circ p = p$ (c'est ici très rapide). Le noyau de p est constitué des vecteurs pour lesquels $x + y = 0$, autrement dit $F = \ker(p) = \mathrm{Vect}((1,-1))$, et l'image de ceux vérifiant $p(x,y) = (x,y)$, soit $\dfrac{x+y}{2} = x = y$, donc $x = y$. Autrement dit, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}((1,1))$.

Remarque 12. Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, $q = \mathrm{id} - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F. En effet, avec les notations introduites ci-dessus, $q(x) = x_G = x - x_F = (\mathrm{id} - p)(x)$.

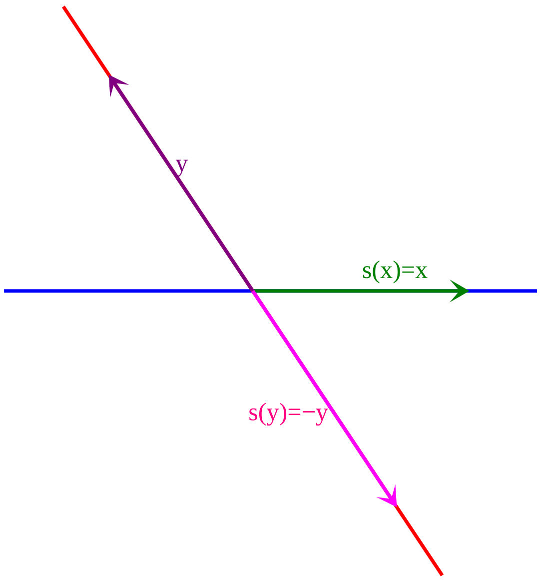
Définition 9. Avec les mêmes hypothèses et notations que dans la définition des projections, la **symétrie par rapport à F parallèlement à G** est l'application linéaire $s : x \mapsto x_F - x_G$.

Proposition 10. Un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}$. Dans ce cas,

- $F = \ker(s - \mathrm{id})$ et $G = \ker(s + \mathrm{id})$.
- $E = \ker(s - \mathrm{id}) \oplus \ker(s + \mathrm{id})$.
- $s = 2p - \mathrm{id}$, en notant p la projection sur F parallèlement à G.

Démonstration. Il est une fois de plus facile de commencer par les dernières propriétés. La condition $s(x) = x$ correspond à $x = x_F \in F$, la condition $s(x) = -x$ correspond à $x = x_G \in G$. La supplémentarité des deux noyaux en découle. Quant à la dernière propriété, elle est immédiate : $(2p - \mathrm{id})(x) = 2x_F - (x_F + x_G) = x_F - x_G = s(x)$. Le fait que s vérifie $s \circ s(x) = x$ est à peu près immédiat, et la réciproque peut se prouver de façon similaire à ce qu'on a fait pour les projections. On prouver que $F = \ker(s - \mathrm{id})$ et $G = \ker(s + \mathrm{id})$ sont supplémentaires : si $x \in F \cap G$, alors $s(x) = x$ et $s(x) = -x$, donc $s \circ s(x) = s(-x) = -s(x) = -x$, soit $x = -x$ puisque $s \circ s = \mathrm{id}$, et $x = 0$; par ailleurs, $x = \dfrac{x + s(x)}{2} + \dfrac{x - s(x)}{2}$, le premier élément vérifie $s\left(\dfrac{x + s(x)}{2}\right) = \dfrac{s(x) + x}{2}$, donc il appartient à F ; le deuxième appartient de même à G. Enfin, $x_F - x_G = \dfrac{x + s(x)}{2} - \dfrac{x - s(x)}{2} = s(x)$, donc s est bien une symétrie. □

Remarque 13. Ces conditions signifient simplement que ce par rapport à quoi on symétrise est laissé fixe par s, et ce parallèlement à quoi on symétrise est envoyé sur son opposé :



Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on chercher à déterminer une expression analytique de la symétrie par rapport à $F = \text{Vect}((1,0,1))$ et parallèlement à $G = \text{Vect}((1,2,3);(1,0,0))$. Il faudrait déjà commencer par prouver que $F \oplus G = E$. comme nous avons de toute façon besoin de connaître la décomposition d'un vecteur dans $F \oplus G$ pour calculer son image par s, le calcul ne peut pas faire de mal. Considérons donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, er cherchons trois réels a, b et c tels que $(x,y,z) = a(1,0,1) + b(1,2,3) + c(1,0,0)$. Il n'est même pas indispensable d'écrire entièrement le système : la deuxième coordonnée donne immédiatement $y = 2b$, soit $b = \frac{y}{2}$; puis la troisième donne $a + 3b = z$, soit $a = z - 3b = z - \frac{3}{2}y$, et enfin via la première coordonnée $x = a + b + c$, donc $c = x - a - c = x + y - z$. Finalement, le système admet toujours une solution unique, ce qui prouve la supplémentarité de F et de G. Par ailleurs, $s(x,y,z) = a(1,0,1) - b(1,2,3) - c(1,0,0) = \left(z - \frac{3}{2}y, 0, z - \frac{3}{2}y\right) - \left(\frac{1}{2}y, y, \frac{3}{2}y\right) - (x+y-z,0,0) = (-x-3y+2z, -y, z-3y)$. On vérifie facilement que $s \circ s = \text{id}$ avec cette expression.

Définition 10. Toujours avec les mêmes notations que dans les définitions précédentes, l'**affinité de rapport λ par rapport à F et parallèlement à** G est l'application linéaire $a : x \mapsto x_F + \lambda x_G$.

Remarque 14. Les projections et symétries sont des cas particuliers d'affinités, lorsque $\lambda = 0$ et $\lambda = -1$ respectivement. Si $\lambda \neq 0$, l'affinité est un automorphisme, dont la réciproque est l'affinité de rapport $\frac{1}{\lambda}$. Notons aussi que, pour une affinité a, on a toujours $E = \ker(a - \text{id}) \oplus \ker(a - \lambda\,\text{id})$.