TD n°9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

3 avril 2014

Exercice 1

1. Calculons $f(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) = f(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z') = (2\lambda y+2\mu y'-2\lambda z-2\mu z', \lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'-2\lambda z-2\mu z', \lambda x+\mu x'-\lambda y-\lambda y') = \lambda(2y-2z, x+y-2z, x-y)+\mu(2y'-2z', x'+y'-2z', x'-y') = \lambda f(x,y,z)+\mu f(x',y',z')$. L'application f est bien une application linéaire.

2. Le noyau est constitué des triplets solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccccc} & & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array}\right.$. Les équations extrêmes donnent immédiatement $x=y=z$, en reportant dans la deuxième on trouve alors $0=0$ qui est toujours vérifié donc $\ker(f)=\{(x,x,x) \mid x\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. Pour l'image, on peut calculer les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $f(1,0,0) = (0,1,1)$; $f(0,1,0)=(2,1,-1)$ et $f(0,0,1)=(-2,-2,0)$. Comme $(2,1,-1) = -(-2,-2,0)-(0,1,1)$, on peut l'oublier et conclure que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}((0,1,1),(-2,-2,0)) = \mathrm{Vect}((0,1,1),(1,1,0))$. L'application n'est donc pas injective (le noyau contient d'autres vecteurs que le vecteur nul) ni surjective (le vecteur $(1,0,0)$ par exemple n'appartient pas à l'image, on ne peut pas l'écrire comme combinaison linéaire de $(1,1,0)$ et $(0,1,1)$). A fortiori, f n'est pas bijective.

3. Commençons par prouver que $\ker(f)\cap \mathrm{Im}\,(f)=\{0\}$. Soit donc un vecteur u appartenant à la fois à $\ker(f)$ et à $\mathrm{Im}\,(f)$. On peut alors écrire u, d'une part sous la forme (x,x,x) pour un certain réel x, d'autre part comme combinaison linéaire $a(0,1,1)+b(1,1,0) = (b, a+b, a)$. On doit donc avoir à la fois $x=a$, $x=b$ et $x=a+b$, ce qui n'est possible que si $x=a=b=0$, soit $u=0$.

   Montrons maintenant que $\ker(f)+\mathrm{Im}\,(f)=\mathbb{R}^3$. Soit donc $u=(x,y,z)$, on cherche trois réels a, b et c tels que $u=a(1,1,1)+b(1,1,0)+c(0,1,1)$, ce qui se traduit par le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & x \\ a & + & b & + & c & = & y \\ a & & & + & c & = & z \end{array}\right.$. En soustrayant la première et la troisième ligne du système à la deuxième, on obtient immédiatement $c=y-x$ et $b=y-z$. Ensuite, $a=x-b=x-y+z$. On peut donc écrire n'importe quel vecteur de l'espace comme somme d'un vecteur du noyau et d'un vecteur de l'image de f. ces deux sous-espaces sont bien supplémentaires.

4. La question précédente nous permet d'affirmer que $(x,y,z)=(x-y+z)(1,1,1)+(y-z)(1,1,0)+(y-x)(0,0,1)$, avec le premier terme de la somme de droite appartenant à $\ker(f)$, et les deux suivants à $\mathrm{Im}\,(f)$. La projection sur $\mathrm{Im}\,(f)$ parallèlement à $\ker(f)$ donne donc $p(x,y,z) = (y-z)(1,1,0)+(y-x)(0,1,1) = (y-z, 2y-x-z, y-x)$. On vérifie facilement si on le souhaite que $p^2=p$.

5. Calculons donc : $f^2(x,y,z) = f(f(x,y,z)) = (2(x+y-2z)-2(x-y), 2y-2z+x+y-2z-2(x-y), 2y-2z-x-y+2z) = (4y-4z, -x+5y-4z, -x+y)$; puis $f^3(x,y,z) = (2(-x+5y-4z)-2(-x+y), 4y-4z-x+5y-4z-2(-x+y), 4y-4z+x-5y+4z) = (8y-8z, x+7y-8z, x-y)$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $f^3(x,y,z)-f^2(x,y,z)+2f(x,y,z) = (8y-8z, x+7y-8z, x-y)-(4y-4z, -x+5y-4z, -x+y)-(4y-4z, 2x+2y-4z, 2x-2y) = (0,0,0)$, ce qui est vrai.

6. Calculons $r \circ r = \dfrac{1}{36}(f^2+f)\circ(f^2+f) = \dfrac{1}{36}(f^4+2f^3+f^2)$, Comme $f^3 = f^2+2f$, $f^4 = f\circ(f^2+2f) = f^3+2f^2 = 3f^2+2f$, et $r^2 = \dfrac{1}{36}(3f^2+2f+2f^2+4f+f^2) = \dfrac{1}{36}(6f^2+6f) = \dfrac{1}{6}(f^2+f) = r$, donc r est un projecteur. De même, $s^2 = \dfrac{1}{9}(f^2-2f)\circ(f^2-2f) = \dfrac{1}{9}(f^4-4f^3+4f^2) = \dfrac{1}{9}(3f^2+2f-4f^2-8f+4f^2) = \dfrac{1}{9}(3f^2-6f) = \dfrac{1}{3}(f^2-2f) = s$, donc s est également un projecteur. De plus, $f\circ r = \dfrac{1}{6}(f^3+f^2) = \dfrac{1}{6}(2f^2+2f) = \dfrac{2}{6}(f^2+f) = 2r$, et $f\circ s = \dfrac{1}{3}(f^3-2f^2) = \dfrac{1}{3}(-f^2+2f) = -s$.
7. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $f^n = 2^n r + (-1)^n s$. Au rang 1, on a $2r - s = \dfrac{1}{3}(f^2+f) - \dfrac{1}{3}(f^2-2f) = \dfrac{1}{3}(3f) = f$, donc P_1 est vraie. Supposons que P_n est vraie, alors d'après les résultats de la question précédente, $f^{n+1} = f\circ f^n = f\circ(2^n r+(-1)^n s) = 2^n f\circ r + (-1)^n f\circ s = 2^{n+1}r + (-1)^{n+1}s$. On en déduit que $f^n = \dfrac{2^n}{6}(f^2+f) + \dfrac{(-1)^n}{3}(f^2-2f) = \dfrac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}f^2 + \dfrac{2^{n-1}-2(-1)^n}{3}f$, soit $f^n(x,y,z) = \dfrac{1}{3}((2^{n-1}+(-1)^n)(4y-4z) + (2^{n-1}-2(-1)^n)(2y-2z), \dots)$, qu'on peut simplifier si on a du temps à perdre.

Exercice 2

I. Une somme directe intéressante.

1. Comme f et id commutent, on peut calculer $p^2 = \left(\dfrac{2}{3}f + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{id}\right)^2 = \dfrac{4}{9}f^2 + \dfrac{4}{9}f + +\dfrac{1}{9}\,\mathrm{id} = \dfrac{2}{9}(f+\mathrm{id}) + \dfrac{4}{9}f + \dfrac{1}{9}\,\mathrm{id} = \dfrac{2}{3}f + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{id} = p$. L'application p est donc un projecteur.
2. Puisque p est un projecteur, son image est constituée des vecteurs x vérifiant $p(x) = x$, c'est-à-dire $\dfrac{2}{3}f(x) + \dfrac{1}{3}x = x$. On en déduit très facilement que la condition est équivalente à avoir $f(x) = x$.
3. Pour tout vecteur x, on peut écrire $p(x) + q(x) = x$. En effet, si on écrit x sous la forme $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \ker(p)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}\,(p)$, alors $p(x) = x_2$ et $q(x) = x_1$, donc $p(x)+q(x) = x_1+x_2 = x$. Autrement dit, $q = \mathrm{id} - p$. Comme par ailleurs $p = \dfrac{2}{3}f + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{id}$ implique $\mathrm{id} = 3p - 2f$, on en déduit que $q = 3p - 2f - p = 2p - 2f$.
4. On sait que, p étant un projecteur, $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}\,(p)$. On a vu à la question 2 que $\mathrm{Im}\,(p) = \{x \mid f(x) = x\} = \ker(f - \mathrm{id})$. Par ailleurs, $\ker(p) = \mathrm{Im}\,(q)$. Comme q est un projectur, $\mathrm{Im}\,(q) = \{x \mid q(x) = x\} = \{x \mid 2p(x) - 2f(x) = x\}$. Or, $2p(x) - 2f(x) = \dfrac{4}{3}f(x) + \dfrac{2}{3}x - 2f(x)$, donc $2p(x) - 2f(x) = x \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}f(x) = \dfrac{1}{3}x$, ou encore $f(x) = -\dfrac{1}{2}x$. Autrement dit, $\mathrm{Im}\,(q) = \ker\left(f + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{id}\right)$, ce qui donne bien l'égalité souhaitée.

II. Expression des puissances de f.

1. Tentons une démonstration par récurrence. Au rang 0, $f^0 = \mathrm{id}$ et $p+q = \mathrm{id}$ (résultat utilisé plus haut), donc la relation est vraie. Supposons-là vérifiée au rang n, alors $f^{n+1} = f\circ f^n = f\circ p + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n f\circ q$. Or, $f\circ p = \dfrac{2}{3}f^2 + \dfrac{1}{3}f = \dfrac{1}{3}(f+\mathrm{id}) + \dfrac{1}{3}f = \dfrac{2}{3}f + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{id} = p$; et $f\circ q = f\circ(2p-2f) = 2p - 2f^2 = 2p - f - \mathrm{id}$. En utilisant $\mathrm{id} = 3p - 2f$, on trouve $f\circ q = -p + f = -\dfrac{1}{2}(2p-2f) = -\dfrac{1}{2}q$.

en reportant ces deux égalités dans notre calcul précédent, on trouve $f^{n+1} = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} q$, ce qui est bien la formule attendue au rang $n+1$. Par principe de récurrence, elle est donc valable pour tout entier n.

2. Reprenons la relation initiale $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{id})$. On peut l'écrire sous la forme $f \circ \left(f - \frac{1}{2}\text{id}\right) = \frac{1}{2}\text{id}$, ou encore $f \circ (2f - \text{id}) = \text{id}$. L'application f est donc bijective, de réciproque $f^{-1} = 2f - \text{id}$.

3. La relation nous donnerait $f^{-1} = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} q = p - 2q$. Or, $p - 2q = p - 2(2p - 2f) = 4f - 3p = 4f - 2f - \text{id} = 2f - \text{id}$. La relation reste donc valable pour $n = -1$. Pour regarder ce qui se passe pour un n négatif quelconque, on peut refaire une récurrence. On vient de vérifier que, pour $n = -1$, la formule était vraie. Supposons-là au rang $-n$ (si ça vous choque vraiment de faire une récurrence sur des entiers négatifs, vous appelez Q_n la propriété $f^{-n} = p + (-2)^n q$), et calculons $f^{-n-1} = f^{-1} \circ f^{-n} = (2f - \text{id}) \circ (p + (-2)^n q) = 2f \circ p + (-2)^n (2f \circ q) - p - (-2)^n \circ q$. En utilisant les relations $f \circ p = p$ et $f \circ q = -\frac{1}{2}q$, on trouve $f^{-n-1} = 2p - (-2)^n q - p - (-2)^n q = p + (-2)^{n+1} q$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. Celle-ci reste donc valable pour tous les entiers relatifs. On pouvait aussi, alternativement, prouver que la formule donnait bien pour $-n$ la réciproque de f^n, autrement dit que $\left(p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q\right) \circ (p + (-2)^n q) = \text{id}$. En effet, cette expression se développe en $p^2 + (-2^n) p \circ q + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q \circ p + q$. Or, $p \circ q = p \circ (2p - 2f) = \left(\frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\text{id}\right)\left(-\frac{2}{3}f + \frac{2}{3}\text{id}\right) = -\frac{4}{9}f^2 + \frac{2}{9}f + \frac{2}{9}\text{id} = 0$ puisque $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{id})$. De même, $q \circ p = 0$ (tout celà commute puisqu'on peut tout exprimer en fonction de f et de id). Il ne reste donc de notre calcul que $p + q$, qui est bien égal à l'identité.

III. Un exemple concret.

1. Calculons donc $f \circ f(x, y, z) = \Big(4x - 2y - 2z - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z - 3x + y + 2z; 3x - \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z$ $-\frac{9}{4}x + \frac{9}{4}y + \frac{3}{4}z - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + z; 6x - 3y - 3z - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z - 6x + 2y + 4z\Big)$ $= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z; -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y + \frac{1}{4}z; -\frac{3}{2}x + +\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z\right)$, ce qui correspond bien à $\frac{1}{2}(f(x, y, z) + (x, y, z))$ (calcul passionnant).

2. Appartenir à $\ker(f - \text{id})$ est équivalent à vérifier l'équation $f(x) = x$, ce qui nous mène au système $\left\{\begin{array}{ccccccc} -2x & + & y & + & z & = & x \\ -\frac{3}{2}x & + & \frac{3}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & y \\ -3x & + & y & + & 2z & = & z \end{array}\right.$. Quitte à multiplier la deuxième équation par deux, les trois équations se ramènent à $-3x + y + z = 0$, soit $z = 3x - y$. Autrement dit, $\ker(f - \text{id}) = \{(x, y, 3x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, 3); (0, 1, -1))$.

De même, le deuxième noyau se calcule en résolvant $\left\{\begin{array}{ccccccc} -2x & + & y & + & z & = & -\frac{1}{2}x \\ -\frac{3}{2}x & + & \frac{3}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2}y \\ -3x & + & y & + & 2z & = & -\frac{1}{2}z \end{array}\right.$. Multiplions partout par 2 et passons tout à gauche pour obtenir $\left\{\begin{array}{ccccccc} -3x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -3x & + & 4y & + & z & = & 0 \\ -6x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$.
La différence des deux premières équations donne $2y - z = 0$, et $2L_1 - L_3$ donne $2y - z = 0$ aussi. Sans surprise, le système n'est donc pas de Cramer, on peut exprimer $z = 2y$, puis $3x =$

$2y+2z = 6y$, donc $x = 2y$. Finalement, $\ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right) = \{(2y, y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2,1,2))$.

3. Si on tient vraiment à donner les expression analytiques, $p(x,y,z) = \Big(-x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z; -x + \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}z; -2x +$ et $q(x,y,z) = (x,y,z) - p(x,y,z) = \left(2x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z; x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z; 2x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z\right)$.

4. D'après les calculs de la deuxième partie, $f^n(x) = p(x) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q(x)$. On va se contenter d'écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} -1-(-\frac{1}{2})^{n-1} & \frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n) & \frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n) \\ -1+(-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3}(4-(-\frac{1}{2})^n) & \frac{1}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n) \\ -2-(-\frac{1}{2})^{n-1} & \frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n) & \frac{1}{3}(5+(-\frac{1}{2})^{n-1}) \end{pmatrix}$ et de dire que $f^n(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Exercice 3

1. (a) Il n'y a même pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{n}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$, ce qui coïncide avec la valeur imposée pour $f_n(0)$ et prouve donc la continuité à droite de f_n en 0.

   (b) On peut passer directement par le taux d'accroissement : $\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = e^{-\frac{n}{x}}$. D'après les calculs précédents, ce taux d'accroissement tend vers 0 en 0^+, donc f_n est dérivable à droite en 0, et y admet une demi-tangente horizontale.

2. (a) La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions usuelles. On calcule $f_n'(x) = e^{-\frac{n}{x}} + \frac{n}{x^2} \times x e^{-\frac{n}{x}} = \left(\frac{x+n}{x}\right) e^{-\frac{n}{x}}$. Sur $]0, +\infty[$, cette dérivée est toujours positive. Elle s'annule pour $x = -n$, est positive également sur $]-\infty, -n]$, et négative sur $[-n, 0[$.

   (b) Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{n}{x}} = 1$, on obtient facilement $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. En 0^-, il faut invoquer la croissance comparée. Si on veut être très rigoureux, on pose $X = -\frac{n}{x}$, $\underset{x\to 0^-}{X} = +\infty$, et $f_n(x) = -n\frac{e^X}{X}$, qui a pour limite $-\infty$ par croissance comparée.

3. (a) Rappelons donc que $e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.

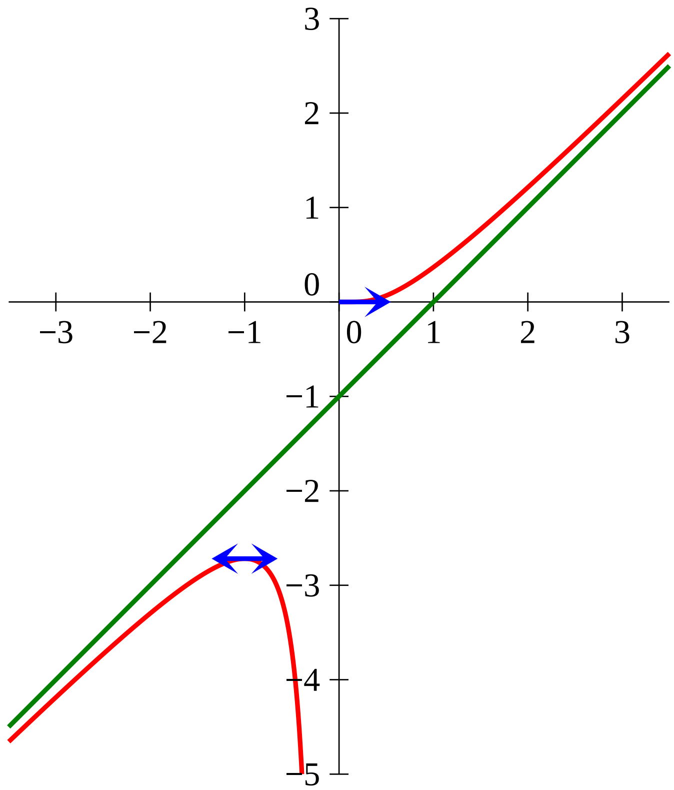
   (b) Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{n}{x}} = 0$, on peut appliquer le développement limité précédent à $u = \frac{-n}{x}$ pour obtenir $e^{-\frac{n}{x}} \underset{x\to\pm\infty}{=} 1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Il ne reste plus qu'à multiplier le tout par x pour trouver le résultat demandé.

   (c) En particulier, $f_n(x) = x - n + o(1)$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x - n$ est asymptote oblique à la courbe à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$. Par ailleurs, le terme suivant du développement est du signe de x, donc la courbe sera située au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$, et en-dessous au voisinage de $-\infty$.

   (d) Récapitulons le tableau de variations de la fonction f_1, en calculant $f_1(-1) = -e^1 = -e$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$ || 0	$\nearrow$	$+\infty$

Sur la courbe, on indique bien entendu la demi-tangente en 0 et l'asymptote :



4. (a) Sur $\mathbb{R}^{-*}$, la fonction f_n est toujours strictement négative, donc ne peut pas prendre la valeur 1. Sur $[0, +\infty[$, f_n est continue et strictement croissante, et effectue une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même. En particulier, 1 admet un unique antécédent (strictement positif) par f_n.

   (b) Il suffit pour cela de calculer $f_n(1) = e^{-n} < 1$. La fonction étant strictement croissante sur $\mathbb{R}+$, $1 < u_n$. Par ailleurs, $u_n e^{-\frac{n}{u_n}} = 1$ implique, en passant au ln, que $\ln(u_n) - \dfrac{n}{u_n} = 0$, soit $u_n \ln(u_n) = n$.

   (c) La fonction g est dérivable sur $[1, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = \ln(x) + 1 > 0$, elle est donc strictement croissante et bijective. Comme $g(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, la fonction g est bijective de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. La fonction g^{-1} est donc définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} g^{-1}(x) = +\infty$. Comme $u_n = g^{-1}(n)$ (c'est une conséquence immédiate des résultats de la question précédente), on peut en effet en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

   (d) On sait déjà que $u_n \ln(u_n) = n$, et les deux membres étant supérieurs ou égaux à 1, on peut prendre le ln des deux côtés pour obtenir $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$. Or, en posant $X = \ln(u_n)$, qui tend vers $+\infty$, on peut affirmer en utilisant la croissance comparée que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$, c'est-à-dire que $\ln(\ln(u_n)) = o(\ln(u_n))$. On en déduit que $\ln(n) = \ln(n) + \ln(\ln(n)) \sim \ln(u_n)$. Attention à ne pas en déduire que u_n est équivalente à n, ce serait faux ! Reprenons plutôt l'égalité $u_n \ln(u_n) = n$. en appliquant l'équivalent qu'on vient d'obtenir, $u_n = \dfrac{n}{\ln(u_n)} \sim \dfrac{n}{\ln(n)}$.

5. (a) C'est une conséquence directe du fait que $u_n = g^{-1}(n)$ et que la fonction g^{-1} a le même sens de variations que g, donc est croissante.

(b) Par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$, c'est-à-dire que $u_{n+1} = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}}}$. On peut alors calculer $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}e^{-\frac{n}{u_{n+1}}} = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}}-\frac{n}{u_{n+1}}} = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

(c) La fonction f_n est croissante sur $[u_n, u_{n+1}]$, minorée par $f_n(u_n) = 1$ et majorée par $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$, on peut donc encadrer I_n en écrivant $\displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} 1\ dt \leqslant \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\ dt \leqslant \int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{\frac{1}{u_{n+1}}}\ dt$. Autrement dit, $u_{n+1}-u_n \leqslant I_n \leqslant e^{\frac{1}{u_{n+1}}}(u_{n+1}-u_n)$. Comme $u_{n+1}-u_n > 0$, on divise pour obtenir l'encadrement souhaité.

(d) Le membre de droite de l'encadrement précédent a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$ puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} = 1$, soit $I_n \sim u_{n+1} - u_n$.