TD n°9 : Révisions pour le DS7

PTSI B Lycée Eiffel

3 avril 2014

Exercice 1

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2y-2z, x+y-2z, x-y) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est une application linéaire (en revenant vraiment à la définition).
2. Déterminer l'image et le noyau de f. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
3. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont supplémentaires.
4. Soit p la projection sur $\mathrm{Im}\,(f)$ parallèlement à $\ker(f)$, donner l'expression de $p(x,y,z)$.
5. Calculer $f^2(x,y,z)$ et $f^3(x,y,z)$, et vérifier que $f^3 - f^2 - 2f = 0$.
6. On pose $r = \dfrac{1}{6}(f^2+f)$ et $s = \dfrac{1}{3}(f^2-2f)$, montrer que r et s sont des projecteurs, et que $f \circ r = 2r$ et $f \circ s = -s$.
7. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $f^n = 2^n r + (-1)^n s$. En déduire l'expression de $f^n(x,y,z)$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, on s'intéresse aux propriétés d'un endomorphisme f sur un espace vectoriel réel E, vérifiant $f \circ f = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{id}_E)$. On notera $f \circ f = f^2$ dans tout l'exercice.

I. Une somme directe intéressante.

On note p l'endormorphisme de E défini par $p = \dfrac{2}{3}f + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que p est un projecteur.
2. Vérifier que $\mathrm{Im}\,(p) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$.
3. On note q le projecteur sur $\ker(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(p)$, exprimer q comme combinaison linéaire de f et de p.
4. En déduire que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker\left(f + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{id}_E\right)$.

II. Expression des puissances de f.

1. Montrer, en utilisant les résultats de la première partie, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = p + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n q$.
2. Montrer que f est un automorphisme de E.
3. La relation obtenue pour f^n reste-t-elle valable si $n = -1$? Plus généralement si $n \in \mathbb{Z}$?

III. Un exemple concret.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = \left(-2x+y+z; -\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z; -3x+y+2z\right)$.

1. Prouver que $f^2 = \frac{1}{2}(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
2. Déterminer $\ker(f-\mathrm{id})$ et $\ker\left(f+\frac{1}{2}\mathrm{id}\right)$, et donner une base de chacun de ces deux noyaux.
3. Déterminer l'expression des projecteurs p et q tels que définis dans la première partie.
4. En déduire l'expression de f^n.

Exercice 3

Dans cet exercice, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.
On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.
   (b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n.
2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.
   (b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variations de f_n.
3. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.
   (b) En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a :
   $f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
   (c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}_n$ admet une asymptote oblique D_n dont on donnera une équation. Préciser la position relative de D_n et C_n aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
   (d) Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_1$.
4. (a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.
   (b) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de l'équation $x\ln(x) = n$.
   (c) Montrer que la fonction $g : x \mapsto x\ln(x)$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle à déterminer. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1}, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   (d) Justifier la relation $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$, puis montrer que $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
5. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.
   (b) Montrer que : $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.
   (c) On pose $I_n = \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\,dt$. Montrer que : $1 \leqslant \frac{I_n}{u_{n+1}-u_n} \leqslant e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.
   (d) En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.