TD n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

6 mars 2014

Analyse

1. (a) On calcule donc : $g'(x) = 6x^2 - \dfrac{6}{x} = \dfrac{6(x^3-1)}{x}$, qui s'annule effectivement pout l'unique valeur $x = 1$.

   (b) Après avoir constaté que $g(1) = 2 + 3 = 5$, on peut dresser le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

   Les calculs de limites sont facultatifs (celle en 0 ne pose aucun problème, en $+\infty$ on a besoin de croissance comparée). Il découle du tableau de variations que la fonction g ne prend que des valeurs strictement positives.

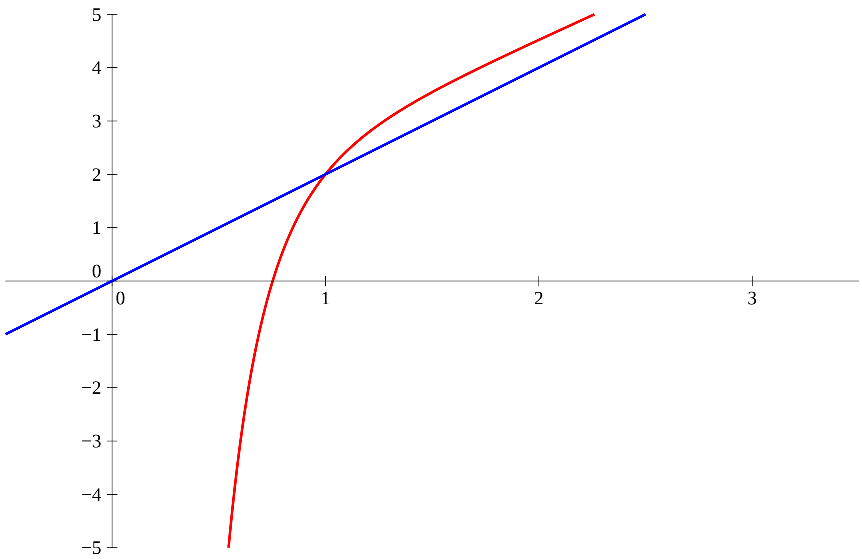
2. (a) Sans difficulté (pas de forme indéterminée), $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$. De l'autre côté, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   (b) Puisque $\dfrac{f(x)}{x} = 2 + \dfrac{3\ln(x)}{x^3}$, une nouvelle application de la croissance comparée permet d'obtenir $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$. Et la limite de $f(x) - 2x$ a déjà été donnée plus haut, elle est nulle, donc $b = 0$.

   (c) On vient de prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0$, donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à la courbe. La positition relative est donnée par le signe de $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$, qui est positif sur $[1, +\infty[$ (la courbe sera alors au-dessus de la droite) et négatif sur $]0, 1]$ (la courbe sera en-dessous de la droite).

3. (a) On calcule $f'(x) = 2 + \dfrac{3x - 6x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{2x^3 + 3 - 6\ln(x)}{x^3} = \dfrac{g(x)}{x^3}$. Puisque g est toujours positive, la fonction f est donc strictement croissante (et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$). Non, vraiment, pas besoin de faire un tableau pour si peu.

   (b) Il n'y a à vrai dire pas grand chose à tracer :



4. (a) C'est une conséquence triviale de la bijectivité de f signalée plus haut.

   (b) Calculons $f(1) = 2 \leqslant 2n$ (par hypothèse), et $f(n) = 2n + \dfrac{3\ln(n)}{n^2} \geqslant 2n$ (puisque $\ln(n) \geqslant 0$). Comme $f(u_n) = 2n$ et la fonction f étant croissante, l'encadrement $1 \leqslant u_n \leqslant n$ découle de ces calculs.

   (c) Repartons du fait que $f(u_n) = 2n$, c'est-à-dire $2u_n + \dfrac{3\ln(u_n)}{2u_n^2} = 2n$, et divisons par $2n$ pour trouver $\dfrac{u_n}{n} + \dfrac{3\ln(n)}{2nu_n^2} = 1$. À un passage de terme à droite près, c'est bien ce qui nous est demandé.

   (d) L'inégalité de gauche découle du fait que $u_n \geqslant 1$, donc $\ln(u_n) \geqslant 0$. Celle de droite est à peine plus difficile : $u_n \leqslant n$, donc $\ln(u_n) \leqslant \ln(n)$, et $u_n \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{nu_n^2} \leqslant \dfrac{1}{n}$ (changement de sens de l'inégalité en passant à l'inverse). On fait le produit des deux inégalités (tout est positif) pour obtenir $\dfrac{\ln(u_n)}{nu_n^2} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$.

   (e) Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$, le théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{nu_n^2} = 0$. Reporté dans l'égalité de la question c, ce résultat implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{u_n}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

Algèbre

1. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 2\sqrt{2} & 5 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 7\sqrt{2} & 6 \\ 7\sqrt{2} & 13 & 7\sqrt{2} \\ 6 & 7\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$.

2. Commençons par vérifier que cela marche pour $n = 0$: on a $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ v_0 & u_0 + w_0 & v_0 \\ w_0 & v_0 & u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0$, donc c'est bon. Si on suppose désormais l'hypothèse vérifiée au rang

n, on a alors $A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} u_n + \sqrt{2}v_n & \sqrt{2}u_n + v_n + \sqrt{2}w_n & \sqrt{2}v_n + w_n \\ \sqrt{2}u_n + v_n + \sqrt{2}w_n & u_n + 2\sqrt{2}v_n + w_n & \sqrt{2}v_n + w_n \\ \sqrt{2}v_n + w_n & \sqrt{2}u_n + v_n + \sqrt{2}w_n & u_n + \sqrt{2}v_n \end{pmatrix}$

En posant $u_{n+1} = u_n + \sqrt{2}v_n$, $v_{n+1} = \sqrt{2}u_n + v_n + \sqrt{2}w_n$ et $w_{n+1} = \sqrt{2}v_n + w_n$ la matrice est exactement de la forme voulue, ce qui achève la récurrence.

3. Constatons que $d_{n+1} = u_{n+1} - w_{n+1} = u_n + \sqrt{2}v_n - \sqrt{2}v_n - w_n = d_n$, donc d_n est constante égale à $d_0 = u_0 - w_0 = 1$.
4. (a) On a $s_{n+1} = u_{n+1} + w_{n+1} = u_n + 2\sqrt{2}v_n + w_n = s_n + 2\sqrt{2}v_n$.
   (b) On a $v_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} + v_{n+1} + \sqrt{2}w_{n+1} = \sqrt{2}s_{n+1} + v_{n+1}$.
   (c) Donc $v_{n+2} = v_{n+1} + \sqrt{2}s_n + 4v_n = v_{n+1} + \sqrt{2}u_n + \sqrt{2}w_n + v_n + 3v_n = 2v_{n+1} + 3v_n$.
5. La suite v_n est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$, dont les racines sont -1 (racine évidente) et 3. La suite v_n est donc de la forme $\alpha 3^n + \beta(-1)^n$, avec α et β deux constantes réelles. Comme $v_0 = 0$ et $v_1 = \sqrt{2}$, on a $\alpha + \beta = 0$, donc $\beta = -\alpha$ et $3\alpha - \beta = \sqrt{2}$, donc $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, et $v_n = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(3^n - (-1)^n)$.

   Comme on sait par ailleurs que $v_{n+1} = \sqrt{2}s_n + v_n$, $s_n = \dfrac{v_{n+1} - v_n}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}(3^{n+1} - (-1)^{n+1} - 3^n + (-1)^n) = \dfrac{1}{4}(2 \times 3^n + 2 \times (-1)^n) = \dfrac{3^n + (-1)^n}{2}$.
6. On a vu plus haut que $u_n - w_n = 1$, donc $u_n = w_n + 1$, d'où $s_n = 2w_n + 1$, soit $w_n = \dfrac{s_n - 1}{2} = \dfrac{3^n + (-1)^n - 2}{4}$. On en déduit $u_n = w_n + 1 = \dfrac{3^n + (-1)^n + 2}{4}$.
7. Il ne reste plus qu'à poser $n = 4$: $u_4 = \dfrac{81 + 1 + 2}{4} = 21$; $w_4 = 20$; $v_4 = 20\sqrt{2}$, donc $A^4 = \begin{pmatrix} 21 & 20\sqrt{2} & 20 \\ 20\sqrt{2} & 41 & 20\sqrt{2} \\ 20 & 20\sqrt{2} & 21 \end{pmatrix}$.

Dénombrement

1. (a) Il y a 6 personnes à cases sur 10 places, avec un ordre important, et pas de répétitions possibles, donc $A_{10}^6 = \dfrac{10!}{4!}$ possibilités.
   (b) Il faut d'abord choisir les deux personnes qui restent debout, puis asseoir les quatre personnes restantes (pas de choix pour les personnes debout), ce qui donne $\dbinom{4}{2} \times A_{10}^4 = \dbinom{4}{2}\dfrac{10!}{6!}$ possibilités.
   (c) Il faut choisir les dix personnes qui s'asseoient (ou les cinq qui restent debout si on préfère), puis choisir un ordre sur les 10 personnes assises, ce qui laisse $\dbinom{15}{10} \times 10!$ possibilités. Si seulement 8 veulent s'asseoir, le raisonnement est exactement le même, et donne $\dbinom{15}{8} \times \dfrac{10!}{2!}$ positionnements.
   (d) On commence par choisir les places du couple parmi les cinq paires possibles, et on les asseoit (ça peut se faire de deux façons différentes !). Puis on asseoit les quatre personnes restantes sur les 8 sièges disponibles, soit $\dbinom{5}{1} \times 2! \times \dfrac{8!}{4!}$ dispositions.

(e) Si tout le monde s'asseoit, on a deux possibilités : on asseoit le couple (toujours 5×2 choix possibles), puis on choisit 8 autres personnes à asseoir sur les 13 restantes, et on les ordonne ; ou alors on choisit 10 personnes à asseoir parmi les 13 qui restent une fois le couple écarté, et on les ordonnes (le couple restera debout). Cela donne $5 \times 2 \times \binom{13}{8} \times 8! + \binom{13}{10} \times 10!$ positions possibles. Si seulement huit personnes s'asseoient, le même découpage de cas donnera $10 \times \binom{13}{6} \times \frac{8!}{2!} + \binom{13}{8} \times \frac{10!}{2!}$ possibilités.

2. (a) Peu importe qu'il y ait deux wagons, il y a 15 personnes à caser sur 20 places qui sont de toute façon distinguables, donc $\frac{20!}{5!}$ façons de le faire.

   (b) Il faut choisir les six personnes de la première rame (ou les neuf de la deuxième), et positionner dans chaque wagon, ce qui donne $\binom{15}{6} \times \frac{10!}{4!} \times \frac{10!}{1!}$ dispositions.

   (c) On choisit la paire de sièges du premier couple (10 choix), on les asseoit (deux possibilités), pareil pour le deuxième couple (9 choix multipliés par 2), reste ensuite à assoir 11 personnes sur 16 sièges, donc $10 \times 2 \times 9 \times 2 \times \frac{16!}{5!}$.

   (d) Légère différence par rapport à la question précédente : on choisit simultanément les trois paires de sièges du groupe (parmi 10 paires possibles), on asseoit n'importe comment les six personnes du groupe sur ces sièges (6! possibilités), puis on case les neuf personnes restantes sur 14 sièges, soit $\binom{10}{3} \times 6! \times \frac{14!}{5!}$ possibilités.

3. (a) On commence à maîtriser : 40 sièges pour quatre personnes donne $\frac{40!}{36!}$ possibilités.

   (b) Il faut choisir qui va dans quelle rame (4! choix), puis pour chaque wagon, on a 10 possibilités pour asseoir la personne qui s'y trouve, soit $4! \times 10^4$ possibilités.

   (c) Il reste 20 places à disposition des quatre personnes, donc $\frac{20!}{16!}$ choix possibles.

   (d) Pour que (par exemple), les deux premiers wagons uniquement soient vides, on reprend le résultat précédent, en lui enlevant les dispositions où tout le monde est dans le troisième wagon, soit $\frac{10!}{6!}$ choix, ainsi que tous ceux où tout le monde est dans le quatrième (même nombre). Il en reste donc $\frac{20!}{16!} - 2 \times \frac{10!}{6!}$. Il faut encore multiplier tout cela par le choix des deux wagons vides, c'est-à-dire par $\binom{4}{2}$ pour répondre à la question.

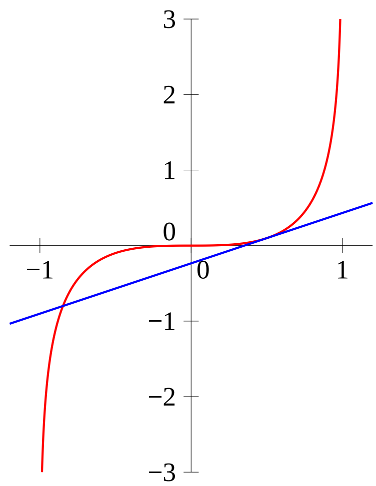
   (e) Il faut choisir le wagon plein, et asseoir les quatre personnes dedans : $4 \times \frac{10!}{6!}$.

   (f) On ne peut évidemment pas avoir quatre wagons vides. Comme on a calculé le nombre de cas à trois, deux et zéro wagon vides, un petit passage au complémentaire nous donne ceux avec un wagon vide : $\frac{40!}{36!} - 4! \times 10^4 - 6\left(\frac{20!}{16!} - 2 \times \frac{10!}{6!}\right) - 4 \times \frac{10!}{6!}$. Un petit peu de calcul : pour zéro wagon vide, on a $24 \times 10\ 000 = 240\ 000$ positions ; pour trois wagons vides, $4 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 < 4 \times 10^4$, ce qui est beaucoup plus petit que le nombre précédent ; pour deux wagons vides, $6 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 > 6 \times 16^4 = 6 \times 65\ 536 > 360\ 000$, auquel on retranche un nombre inférieur à $12 \times 10^4 = 120\ 000$, ce qui donne un nombre plus gros que les cas à zéro wagon vide. Le nombre total de cas, lui, était de $40 \times 39 \times 38 \times 37 = 2\ 193\ 360$. Quand on retranche à ceci 240 000, un nombre plus petit que 40 000, et un nombre plus petit que $6 \times 20^4 = 960\ 000$, il reste quelque chose de plus gros que tous les nombres précédents. Autrement dit, le cas le plus probable c'est un wagon vide.

(g) Le premier s'installe n'importe où et a donc 40 choix ; le deuxième s'installe dans un des trois wagons vides, 30 choix, le troisième dans un des deux wagons vides, 20 choix. Pour le quatrième, comme il y a trois wagons à une personne (et un vide), il peut s'asseoir n'importe où. Distinguons alors deux possibilités : s'il s'asseoit dans le wagon encore vide (10 choix), le cinquième aura devant lui quatre wagons également pleins, et choisira donc une place parmi les 36 restantes, et le dernier choisira dans les trois wagons à une personne, donc aura 27 choix possibles. Par contre si le quatrième se met dans un wagon contenant une personne (27 choix possibles), le cinquième peut aller dans le wagon vide (10 choix, puis 27 pour le dernier dans les trois wagons à une personne) ou dans un des deux wagons à une personne (18 choix, puis 19 pour le dernier qui va prendre le wagon vide ou celui à une personne, les deux autres en contenant deux). Récapitulons : on a $40 \times 30 \times 20 \times (10 \times 36 \times 27 + 27 \times (10 \times 27 + 18 \times 19))$ positionnements possibles (un arbre clarifie les choses, et serait sûrement nécessaire avec plus de 6 personnes).

Analyse (encore !)

1. La fonction g est définie si $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$, soit $\mathcal{D}_g =]-1;1[$ (tableau de signes si vous n'êtes pas convaincus.
2. Le domaine de définition de g est symétrique par rapport à 0, et $g(-x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x} + 2x = -\ln \dfrac{1+x}{1-x} + 2x = -g(x)$, donc la fonction est impaire.
3. La fonction g est dérivable et, en écrivant $g(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x$ (toujours valable sur son domaine de définition), $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} - 2 = \dfrac{2}{(1+x)(1-x)} - 2 = \dfrac{2-2+2x^2}{1-x^2} = \dfrac{2x^2}{1-x^2}$.
4. Calculons $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} - 2 \times \dfrac{1}{2} = \ln 3 - 1$, et $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2 \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{3}$, donc l'équation de la tangente T est $y = \dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \ln 3 - 1 = \dfrac{2}{3}x + \ln 3 - \dfrac{4}{3}$.
5. La fonction g' est strictement positive sur $\mathcal{D}_g$, donc g y est strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1+x}{1-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$. Par imparité de g, $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$.
6. Calculons $g''(x) = \dfrac{2x(1-x^2) + 2x(x^2)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$. La fonction g est donc concave sur $]-1;0]$ et convexe sur $[0;1[$.
7. La fonction g' est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ d'après la question précédente, et $g'(0) = 0$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$, d'où l'encadrement demandé.
8. Voilà la courbe demandée :



9. (a) La fonction g est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, et $g(0)=0$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 3-1<\dfrac{1}{2}$, donc l'intervalle est effectivement stable par g. On prouve ensuite par récurrence que $u_n \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$. En effet, u_0 appartient à l'intervalle par hypothèse, et si u_n est dans l'intervalle, $g(u_n)=u_{n+1}$ aussi par stabilité de l'intervalle.

   (b) Toutes les hypothèses sont réunies pour appliquer l'inégalité des accroissements finis sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ à $y=u_n$ et $z=0$ (qui est bien un point fixe de g). On obtient alors $|u_{n+1}| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n|$. On effectue ensuite une nouvelle récurrence pour prouver que $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. C'est vrai pour u_0 puisque $u_0=\dfrac{1}{2}$, et si on suppose l'hypothèse vérifiée pour u_n, on a $|u_{n+1}| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n| \leqslant \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, ce qui prouve l'hérédité.

   (c) Comme $\dfrac{2}{3}\in[-1;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$, ce qui prouve que la suite (u_n) tend vers 0.