TD n°8 : Révisions pour le DS6

PTSI B Lycée Eiffel

6 mars 2014

Analyse

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = 2x + \dfrac{3\ln(x)}{x^2}$ et $g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Étude du signe de g.
   (a) Calculer $g'(x)$ et vérifier que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution que l'on précisera.
   (b) En déduire le tableau de variations de g puis son signe.
2. Étude asymptotique de f.
   (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) En notant $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax$, calculer les valeurs de a et de b.
   (c) En déduire la présence d'une symptote oblique (D) à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, et étudier la position relative de (D) et de $\mathcal{C}_f$.
3. Représentation graphique de f.
   (a) Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations complet de f.
   (b) Tracer dans un même repère la droite (D) et une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.
4. Étude d'une équation. On considère dans cette dernière question l'équation $(E_n) : f(x) = 2n$.
   (a) Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, l'équation (E_n) admet une unique solution qu'on notera u_n (qu'on ne cherchera sûrement pas à calculer).
   (b) Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant n$.
   (c) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $1 - \dfrac{u_n}{n} = \dfrac{3\ln(u_n)}{2nu_n^2}$.
   (d) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{\ln(u_n)}{nu_n^2} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$.
   (e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

Algèbre

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$. On note comme d'habitude I la matrice identité d'ordre 3 : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer, en raisonnant par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, A^n est de la forme : $A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \\ v_n & u_n + w_n & v_n \\ w_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$, où (u_n), (v_n) et (w_n) sont des suites vérifiant les relations : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \sqrt{2}v_n$, $v_{n+1} = \sqrt{2}u_n + v_n + \sqrt{2}w_n$ et $w_{n+1} = \sqrt{2}v_n + w_n$.
3. On pose $d_n = u_n - w_n$. Montrer que (d_n) est une suite constante (et préciser sa valeur).
4. On pose $s_n = u_n + w_n$.
   (a) Exprimer la relation existant entre s_{n+1}, s_n et v_n.
   (b) Exprimer v_{n+2} en fonction de s_{n+1} et v_{n+1}.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, la relation $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$.
5. Calculer v_n en fonction de n et en déduire l'expression de s_n en fonction de n.
6. A l'aide des expressions de s_n et d_n obtenues, calculer u_n et w_n en fonction de n.
7. Utiliser ces résultats pour calculer A^4.

Dénombrement

Par une belle matinée de mars, un certain nombre d'usagers essayent de se caser dans une rame de métro pékinois qui, fait exceptionnel, arrive sur le quai complètement vide.

1. On suppose pour l'instant que la rame est constituée d'un seul wagon, contenant 10 places assises (qui sont évidemment distinguables) et 20 places debout (qui, elles, ne sont pas distinguables). Les voyageurs, eux, sont toujours distinguables.
   (a) Six personnes entrent dans le wagon et décident toutes de s'asseoir. De combien de façons peut-on les placer ?
   (b) Sur les six personnes, deux décident de rester debout. Combien y a-t-il désormais de dispositions possibles ?
   (c) Combien y aurait-il de dispositions si quinze personnes voulaient monter dans le wagon, dont 10 qui s'asseoient ? Et si seulement 8 s'assoient ?
   (d) Revenons au cas de six personnes. Parmi ces six personnes, se trouve un couple qui veut s'asseoir côte à côte. On suppose que les dix places assises sont réparties en cinq paires de places côte à côte, et que tout le monde s'asseoit. Je suppose que vous êtes capables de deviner la question.
   (e) On reprend 15 personnes parmi lesquelles se trouve le couple précédent, qui peut soit prendre deux places assises côte à côte, soit rester debout (tous les deux). Combien de dispositions si 10 personnes s'assoient ? Et si 8 seulement s'assoient ?
2. On suppose désormais que la rame est constituée de deux wagons, contenant chacun 10 places assises réparties en cinq paires (et pour cette question, personne ne sera debout).
   (a) Quinze personnes montent dans la rame. Combien de dispositions possibles au total ?
   (b) Combien de dispositions avec 6 personnes dans la première rame et 9 dans la deuxième ?

(c) Parmi les quinze voyageurs se trouvent deux couples qui veulent s'asseoir côte à côte (mais pas forcément dans la même rame). Combien de dispositions y a-t-il désormais ?

(d) Parmi les quinze voyageurs se trouve un groupe de six personnes qui veut s'installer sur trois paires de sièges côte à côte (mais peu importe qui est à côté au sein du groupe, et ils peuvent se mettre dans des rames différentes). Toujours la même question.

3. Dans cette dernière question, la rame de métro contient quatre wagons, chacun contenant 10 places assises.

   (a) Quatre personnes montent dans la rame. Combien de dispositions possibles ?

   (b) Les quatre personnes montent chacune dans une rame différente. Combien de dispositions possibles ?

   (c) Combien y a-t-il de dispositions où les deux premiers wagons sont vides ?

   (d) Combien de dispositions où il y a exactement deux wagons vides ?

   (e) Combien de dispositions avec trois wagons vides ?

   (f) En déduire le nombre de dispositions avec exactement un wagon vide. Quel est la quantité de wagons vides la plus probable ?

   (g) Pour cette ultime question, 6 personnes montent successivement dans le métro et choisissent toujours de s'installer dans l'un des deux wagons les moins remplis (à égalité, par exemple si les quatre wagons contiennent le même nombre de voyageurs, ils montent dans un wagon au hasard). Combien de dispositions possibles dans ce cas de figure ?

Analyse (encore !)

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 2x$.

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Montrer que g est impaire.
3. Démontrer que g est dérivable sur son domaine de définition et que $g'(x) = 2\dfrac{x^2}{1-x^2}$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative de g en son point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.
5. Dresser le tableau de variation de g en précisant ses limites aux bornes de son domaine de définition.
6. Calculer g'' et étudier la convexité de g.
7. Montrer que, $\forall x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$, $0 \leqslant g'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$.
8. Tracer une courbe représentative soignée de g, ainsi que de la tangente T (on donne $\ln 3 \simeq 1.1$).
9. On définit une suite (u_n) par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

   (a) Montrer que l'intervalle $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ est stable par g, et en déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

   (b) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n|$, puis en déduire que $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).