TD n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

30 janvier 2014

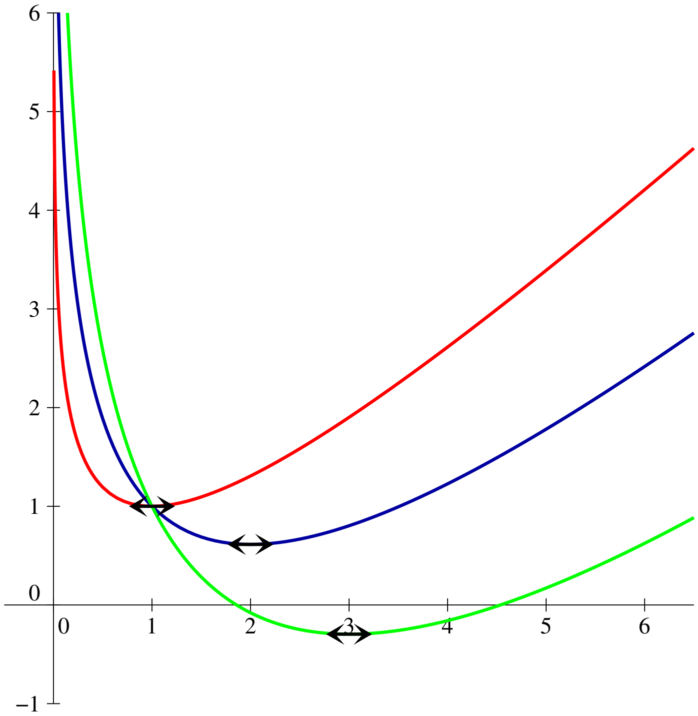
Exercice classique

1. (a) La fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x}$. Cette dérivée s'annule pour $x = n$, par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$ (n est supposé strictement positif) et par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Enfin, $f_n(n) = n - n\ln(n) = n(1 - \ln(n))$. D'où le tableau de variations suivant :

x	0	n	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	$n(1-\ln(n))$	$\nearrow$ $+\infty$

(b) Calculons donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x - (n+1)\ln(x) - x + n\ln(x) = -\ln(x)$. Cette expression est positive si $x \in]0;1]$, négative sur $[1;+\infty[$. Les courbes sont donc « de plus en plus haut » sur $]0;1]$, et « de plus en plus bas » sur $[1;+\infty[$. Elles ont toutes un point commun : $f_n(1) = 1$ quelle que soit la valeur de n.

(c) Voici les allures demandées (f_1 en rouge, f_2 en bleu, f_3 en vert), avec minimum indiqué.



(d) Lorsque $n \geqslant 3$, on a $\ln(n) > 1$ puisque $3 > e$, donc $n(1 - \ln(n)) < 0$. Or, au vu du tableau de variations de la fonction f_n, celle-ci est bijective de $]0;n[$ vers $]n(1-\ln(n));+\infty[$, et de $]n;+\infty[$ vers $]n(1-\ln(n));+\infty[$. Si $n \geqslant 3$, 0 a donc exactement deux antécédents, l'un (celui qu'on notera u_n) sur l'intervalle $]0;n[$, et l'autre sur $]n;+\infty[$ (qui correspond à v_n).

2. (a) On a déja remarqué plus haut que $f_n(1) = 1 > 0$. De plus, $f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ avec $n \geqslant 3$. Puisque $f_n(1) > f_n(u_n) > f_n(e)$, et la fonction f_n étant strictement décroissante sur l'intervalle $]0;n[$ auquel appartiennent ces trois valeurs, on a bien $1 < u_n < e$.

   (b) Calculons donc $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1})$. Or, par définition, on sait que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = 0$ ou encore $u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$. En remplaçant dans le calcul précédent, on a donc $f_n(u_{n+1}) = (n+1)\ln(u_{n+1}) - n\ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. Comme on vient de voir que tous les termes de la suite étaient strictement supérieurs à 1, $\ln(u_{n+1}) > 0$, donc $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$. La fonction f_n étant toujours décroissante sur l'intervalle considéré, $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs minorée par 1, elle converge certainement.

   (c) Au vu de l'encadrement $1 < u_n < e$, et en utilisant le fait que $u_n = n\ln(u_n)$, on a $1 < n\ln(u_n) < e$, soit $\frac{1}{n} < \ln(u_n) < \frac{e}{n}$. Les deux termes extrêmes de cet encadrement ont manifestement pour limite 0, une application du théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

   (d) Puisque u_n tend vers 1, $u_n - 1$ tend vers 0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+(u_n-1))}{u_n-1} = 1$ (limite classique du cours), ce qui revient exactement à dire que la limite recherchée vaut 1.

3. (a) Puisque $n < v_n$, le théorème de comparaison nous donne immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

   (b) Calculons donc : $f_n(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n) - n\ln(\ln(n)) = -n\ln(\ln(n))$. Comme $n \geqslant 3$, $\ln(n) > 1$, et $\ln(\ln(n)) > 0$, donc $f_n(n\ln(n)) < 0$. Comme, par définition, $f_n(v_n) = 0$, et que sur $]n;+\infty[$, intervalle auquel appartiennent ces deux valeurs, f_n est croissante, on en déduit que $n\ln(n) < v_n$.

   (c) On peut reprendre intelligemment les calculs de la toute première question : la fonction f_2 est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc on a $\forall x > 0$, $x > 2\ln(x)$. L'inégalité demandée en découle.

   (d) Calculons à nouveau : $f_n(2n\ln(n)) = 2n\ln(n) - n\ln(2n\ln(n)) = 2n\ln(n) - n\ln(n) - n\ln(2\ln(n)) = n(\ln(n) - \ln(2\ln(n)))$. Or, comme $n > 2\ln(n)$, $\ln(n) > \ln(2\ln(n))$, donc $f_n(2n\ln(n)) > 0$. On en déduit comme tout à l'heure que $v_n < 2n\ln(n)$.

   (e) Au vu de ce qui précède, $\ln(n) + \ln(\ln(n)) \leqslant \ln(v_n) \leqslant \ln(2) + \ln(n) + \ln(\ln(n))$, donc $1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \leqslant \frac{v_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$. Or, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée), donc par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = 0$. Les deux membres extrêmes de l'encadrement précédent ont donc pour limite 1, et on peut appliquer le théorème des gendarmes pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1$.

Exercice bourrin

I. Une première étude de fonction

1. La fonction i est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, et $i'(x) = 2x + 1 - 2x\ln(x) - x = x + 1 - 2x\ln(x)$; $i''(x) = 1 - 2\ln(x) - 2 = -1 - 2\ln(x)$.
2. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to0} x^2\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to0} i(x) = 2$. La fonction est donc prolongeable par continuité en posant $i(0) = -2$. De plus, un calcul similaire donne $\lim\limits_{x\to0} i'(x) = 1$. Le

théorème de prolongement de la dérivée permet alors d'affirmer que i est dérivable en 0, et que $i'(0) = 1$.

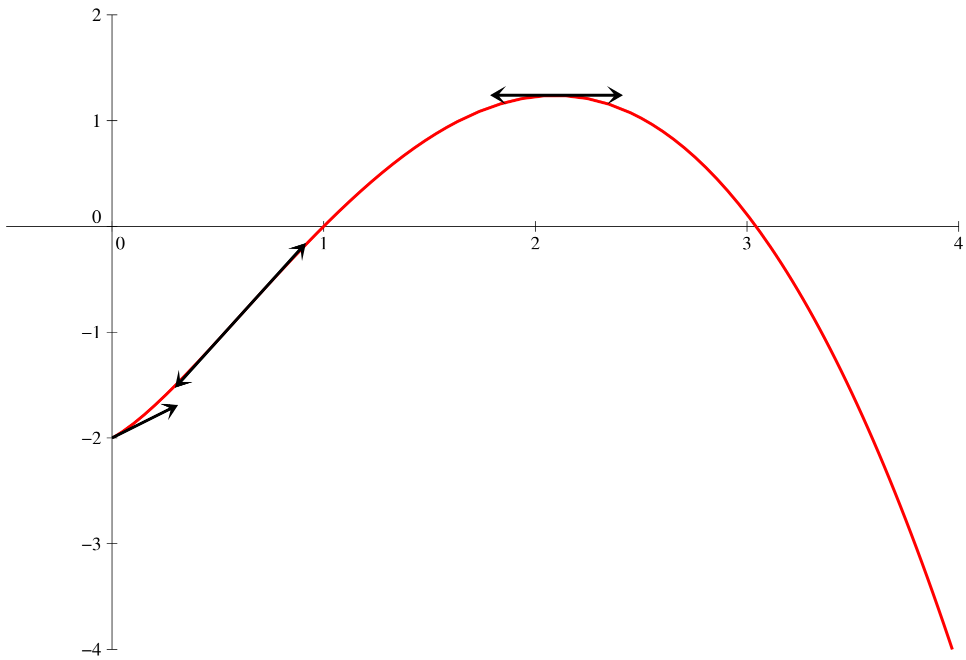
3. La dérivée seconde $i''(x) = -1 - 2\ln(x)$ s'annule lorsque $\ln(x) = -\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Comme $i\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{\sqrt{e}} - 2 - \dfrac{1}{e} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2e} + \dfrac{1}{\sqrt{e}} - 2$, et $i'\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{e}} + 1 - \dfrac{2}{\sqrt{e}} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{e}} + 1$, l'équation de la tangente en ce point a pour équation $y = \left(\dfrac{2}{\sqrt{e}} + 1\right)\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) + \dfrac{3}{2e} + \dfrac{1}{\sqrt{e}} - 2$ (on peut développer si on le souhaite, mais ça ne se simplifie pas vraiment).
4. L'étude du signe de i'' permet d'obtenir le tableau de variations suivant pour i' :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
i'	1	$\nearrow$	$\dfrac{2}{\sqrt{e}} + 1$	$\searrow$	$-\infty$

En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} i'(x) = -\infty$ (en factorisant par x par exemple). La fonction i' est donc strictement positive sur $\left[0; \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$, et effectue ensuite une bijection de $\left[\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$ sur $\left]-\infty; \dfrac{2}{\sqrt{e}} + 1\right]$. En particulier, il existe un unique $\alpha \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$ tel que $i'(\alpha) = 0$. Comme par ailleurs $i'(1) = 2 > 0$, et que i' est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$, on a bien $\alpha > 1$.
5. On déduit du signe de i' le tableau de variations de i :

x	0		1		α		$+\infty$
i	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$i(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

En effet, $i(0) = 1 + 1 - 2 - 0 = 0$, et comme $i(x) \underset{+\infty}{\sim} -x^2\ln(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = -\infty$. Comme $\alpha > 1$, on en déduit que $i(\alpha) > 0$, et en exploitant la bijectivité de i de $[\alpha; +\infty[$ sur $]-\infty; \alpha]$, on obtient l'existence d'un unique $\beta \in [\alpha; +\infty[$ tel que $i(\beta) = 0$.
6. Pour tracer l'allure sur votre copie, puisqu'on donne $\alpha \simeq 2$, vous pouvez calculer une valeur approchée du maximum : $i(\alpha) \simeq i(2) \simeq 4 - 4\ln(2) \simeq 1,2$. Il faut bien entendu que la courbe coupe l'axe des abscisses en 1 et en $\beta \simeq 3$, il faut placer la tangente de pente 1 au point de départ $(0; -2)$ de la courbe, et placer la tangente au point d'inflexion en utilisant que $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$; $i\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) \simeq -0,85$ et $i'\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) \simeq 2,2$. On obtient une courbe de ce type :



II. Une deuxième étude de fonction

1. Avec un $\ln(x)$ au dénominateur de la fraction, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Mais en utilisant la limite classique $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, on trouve $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x)} = \lim\limits_{x-1 \to 0} \dfrac{x-1}{\ln(1+(x-1))} = 1$. On trouve alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x} = 3$, et on peut en effet prolonger la fonction par continuité en posant $f(1) = 3$.
2. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0^-$, et $\lim\limits_{x \to 0} (x+2)(x-1) = -2$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Par ailleurs, en factorisant par x et en invoquant la croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. La fonction f est dérivable partout sauf éventuellement en 1 comme quotient de fonctions usuelles, et $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x\ln(x)) - (\ln(x)+1)(x^2+x-2)}{(x\ln(x))^2} = \dfrac{x^2\ln(x) + 2\ln(x) - x^2 - x + 2}{(x\ln(x))^2} = \dfrac{x^2+2}{(x\ln(x))^2} \times g(x)$. Comme $\dfrac{x^2+2}{(x\ln(x))^2}$ est toujours strictement positif, f' est bien du signe de g.
4. Réécrivons le numérateur, en posant pour simplifier $X = x - 1$ (qui tendra donc vers 0) : $x^2\ln(x) + 2\ln(x) - x^2 - x + 2 = (X+1)^2 \left(X - \dfrac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon(X)\right) + 2\left(X - \dfrac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon(X)\right) - X(X-3)$. On peut tout développer en regroupant tous les termes en X^2 sous la forme d'un $X^2\varepsilon(X)$ (évidemment, ce n'est plus la même fonction ε mais peu importe) : $X - \dfrac{1}{2}X^2 + 2X^2 + 2X - X^2 - X^2 + 3X + X^2\varepsilon(X) = -\dfrac{1}{2}X^2 + \varepsilon(X)$. Quand on divise par le dénominateur qui est de la forme $X(X - \dfrac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon(X)) = X^2 + X^2\alpha(X)$ (avec α qui tend vers 0, cette fois-ci j'ai changé le nom), on trouve facilement que $f(x) = \dfrac{-\frac{1}{2} + \varepsilon(X)}{1 + \alpha(X)}$ qui tend vers $-\dfrac{1}{2}$, donc la fonction est dérivable en 1 (théorème du prolongement de la dérivée), et $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.
5. La fonction g est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée
$g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{(2x+1)(x^2+2) - 2x(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x^3 + x^2 + 4x + 2 - 2x^3 - 2x^2 + 4x}{(x^2+2)^2} =$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2-8x-2}{(x^2+2)^2}=\dfrac{(x^2+2)^2+x(x^2-8x-2)}{x(x^2+2)^2}=\dfrac{x^4+4x^2+4-x^3-8x^2-2x}{x(x^2+2)^2}=\dfrac{h(x)}{x(x^2+2)^2}$.
Le dénominateur de cette fraction étant toujours positif sur $]0;+\infty[$, g' est bien du signe de h.

6. En effet, $h(1)=1+1-4-2+4=0$ et $h(-2)=16-8-4\times 8+4+4=0$. On peut donc factoriser h sous la forme $h(x)=(x-1)(x+2)(ax^2+bx+c)=(x^2+x-2)(ax^2+bx+c)$. On doit donc avoir, en développant, $ax^4+(a+b)x^3+(c+b-2a)x^2+(c-2b)x-2c=x^4+x^3-4x^2-2x+4$. Par identification, on obtient les conditions $a=1$; $a+b=1$; $c+b-2a=-2$; $c-2b=-2$ et $-2c=4$, ce qui donne la solution unique $a=1$; $b=0$ et $c=-2$. Autrement dit, $h(x)=(x-1)(x+2)(x^2-2)$. On peut alors dresser le tableau de signe de h sur $]0;+\infty[$, et le tableau de variations de g sur ce même intervalle :

x	0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h(x)$	4	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$g(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour remplir ce tableau, on a calculé $g(1)=0-\dfrac{0}{3}=0$; constaté que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2}=-1$, donc $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=-\infty$; et que $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x^2}{x^2}=1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

7. La lecture du tableau de variations (on invoquera à nouveau le théorème de la bijection pour être très rigoureux) permet en effet de constater que g s'annule une deuxième fois sur l'intervalle $[\sqrt{2};+\infty[$. Comme g est négative sur $]0;\lambda]$ et positive sur $[\lambda;+\infty[$, on a le tableau de variations suivant pour f :

x	0		λ		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\simeq 2,9$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice franchement méchant, même à l'échelle des exos de dénombrement

Problème 2 : Nombre de surjections entre ensembles finis

1 Exemples et généralités

1. Soit f une application surjective de $\{(1;2;3)\}$ dans $\{(1;2)\}$. Les triplets possibles pour $(f(1);f(2);f(3))$ sont $(1;1;2)$; $(1;2;1)$; $(1;2;2)$; $(2;1;1)$; $(2;1;2)$ et $(2;2;1)$, ce qui nous donne $S_{3,2}=6$.
De même, si g est une application surjective de $\{(1;2;3;4)\}$ dans $\{(1;2)\}$, les quadruplets possibles pour $(g(1);g(2);g(3);g(4))$ sont $(1;1;1;2)$; $(1;1;2;1)$; $(1;1;2;2)$; $(1;2;1;1)$; $(1;2;1;2)$; $(1;2;2;1)$; $(1;2;2;2)$; $(2;1;1;1)$; $(2;1;1;2)$; $(2;1;2;1)$; $(2;1;2;2)$; $(2;2;1;1)$; $(2;2;1;2)$ et $(2;2;2;1)$, d'où $S_{4,2}=14$.
2. Une application ayant pour ensemble de départ $\{1;2;\dots;n\}$ ne peut prendre qu'au plus n valeurs différentes, donc ne pourra pas être surjective dans $\{1;2;\dots;p\}$ si $n<p$. Autrement dit, $S_{n,p}=0$ dans ce cas.
3. La seule application ayant pour ensemble d'arrivée l'ensemble réduit à un seul élément $\{1\}$ est l'application constante égale à 1 (quel que soit l'ensemble de départ). Elle est par ailleurs surjective dès que $n\geqslant 1$, donc $S_{n,1}=1$ pour $n\geqslant 1$.

4. Une application surjective de $\{1;2;\dots;n\}$ dans lui-même n'est autre qu'une permutation de l'ensemble $\{1;2;\dots;n\}$, qui sont au nombre de $n!$, donc $S_{n,n} = n!$.

2 Détermination de $S_{n,2}$

1. On a vu plus haut que $S_{2,2} = 2! = 2$.
2. Considérons une application surjective f de $\{1;2;\dots;n+1\}$ dans $\{1;2\}$, et supposons que $f(n+1) = 1$. Pour que f soit surjective, il suffit alors que la restriction de f à $\{1;2;\dots;n\}$ soit déjà surjective (u_n possibilités) ou que $f(1) = f(2) = \cdots = f(n) = 2$. Il y a de même $u_n + 1$ applications surjectives pour lesquelles $f(n+1) = 2$, ce qui nous donne bien au total $u_{n+1} = 2(u_n + 1)$.
3. La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique. Son équation de point fixe, $x = 2x + 2$, a pour solution $x = -2$. Posons donc $v_n = u_n + 2$, on a alors $v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = 2u_n + 2 + 2 = 2(u_n + 2) = 2v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et vérifiant $v_2 = u_2 + 2 = 4$. On en déduit que $\forall n \geqslant 2$, $v_n = 4 \times 2^{n-2} = 2^n$, puis $u_n = v_n - 2 = 2^n - 2$.
4. Il y a au total 2^n applications de $\{1;2;\dots;n\}$ dans $\{1;2\}$. Parmi celles-ci, les seules qui ne sont pas surjectives sont les deux applications constantes respectivement égales à 1 et à 2. Le nombre d'applications surjectives est donc $2^n - 2$.

3 Détermination de $S_{n,3}$

1. Toujours en revenant à la dernière question de la première partie, $v_3 = S_{3,3} = 3! = 6$.
2. Soit g une application surjective de $\{1;2;\dots;n+1\}$ dans $\{1;2;3\}$ telle que $g(n+1) = 3$. Il y a alors deux possibilités pour la restriction de g à $\{1;2;\dots;n\}$: soit elle est surjective dans $\{1;2;3\}$, soit elle est surjective dans $\{1;2\}$ (sans prendre la valeur 3). Ces deux possibilités ne pouvant se produire simultanément, il y a $v_n + u_n$ applications g convenables. Un raisonnement identique dans le cas où $g(n+1) = 1$ et $g(n+1) = 2$ nous permet d'obtenir au total $v_{n+1} = 3(v_n + u_n)$. Comme $u_n = 2^n - 2$, on a donc $v_{n+1} = 3v_n + 3 \times 2^n - 6$.
3. Bon, euh, on va oublier cette histoire de programme Pascal.
4. D'après le résultat de la question 2, $w_{n+1} = v_{n+1} - 3 = 3v_n + 3 \times 2^n - 6 - 3 = 3(v_n - 3 + 2^n) = 3(w_n + 2^n)$.
5. Calculons $t_{n+1} = w_{n+1} + 3 \times 2^{n+1} = 3(w_n + 2^n + 2^{n+1}) = 3(w_n + 2^n + 2 \times 2^n) = 3(w_n + 3 \times 2^n) = 3t_n$. La suite (t_n) est donc bien géométrique de raison 3.
6. Il ne reste plus qu'à remonter : $t_3 = w_3 + 3 \times 2^3 = w_3 + 24 = v_3 - 3 + 24 = v_3 + 21 = 6 + 21 = 27$. On en déduit que $t_n = 27 \times 3^{n-3} = 3^n$, puis $w_n = 3^n - 3 \times 2^n$ et enfin $v_n = 3^n - 3 \times 2^n + 3$.
7. Les applications de $\{1;2;\dots n+1\}$ dans $\{1;2;3\}$ peuvent être classées selon le nombre de valeurs différentes qu'elles prennent : soit elle prennent les trois valeurs possibles, et il y a par définition v_n telles applications ; soit elles en prennent exactement deux, qu'on peut choisir de $\binom{3}{2} = 3$ façons différentes, et il y a à chaque fois u_n telles applications, donc $3u_n$ au total ; soit elles sont constantes, ce pour quoi on a 3 possibilités. Comme il y a un total de 3^n applications de $\{1;2;\dots;n\}$ dans $\{1;2;3\}$, on obtient la relation $3^n = v_n + 3u_n + 3$, donc $v_n = 3^n - 3u_n - 3 = 3^n - 3(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \times 2^n + 3$.

4 Détermination de $S_{n+1,n}$

1. L'application f étant surjective, tout élément de $\{1;2;\dots;n\}$ admet (au moins) un antécédent par f. Choisissons donc un antécédent pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée, cela nous donne n éléments de $\{1;2.\dots;n+1\}$ ayant des images distinctes par f. Le dernier élément de

$\{1;2;\ldots;n+1\}$ a une image identique à l'un des autres éléments de $\{1;2;\ldots;n+1\}$ (puisqu'on a déjà épuisé tous les éléments de l'ensemble d'arrivée), et cette image est bien l'unique élément de notre ensemble d'arrivée ayant exactement deux antécédents.

2. Il faut choisir deux éléments dans un ensemble en contenant $n+1$, il y a donc $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ possibilités.
3. Une fois choisis l'élément de l'ensemble d'arrivée ayant deux antécédents (n possibilités) et les deux antécédents en question, les $n-1$ éléments restants dans chaque ensemble sont reliés de façon bijective par f, ce qui laisse $(n-1)!$ possibilités. On a donc $S_{n+1,n} = n \times \frac{n(n+1)}{2} \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$.

5 Cas général

1. Considérons une application surjective f de $\{1;2;\ldots;n\}$ dans $\{1;2;\ldots;p\}$. On a p choix possibles pour l'image de n par cette application, et la restriction de f à $\{1;2;\ldots;n-1\}$ est soit surjective vers $\{1;2;\ldots;p\}$ (il y a pour cela $S_{n-1,p}$ possibilités), soit elle prend toutes les valeurs sauf $f(n)$ (il y a pour cela $S_{n-1,p-1}$ possibilités). Cela nous donne bien la relation de récurrence $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.
2.

$S_{n,p}$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$n=0$	0	0	0	0	0	0
$n=1$	0	1	0	0	0	0
$n=2$	0	1	2	0	0	0
$n=3$	0	1	6	6	0	0
$n=4$	0	1	14	36	24	0
$n=5$	0	1	30	150	240	120

3. Calculons séparément les membres de gauche et de droite : $\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{p!}{(p-k)!(k-j)!j!}$. De l'autre côté, $\binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j} = \frac{p!}{j!(p-j)!}\frac{(p-j)!}{(k-j)!(p-k)!} = \frac{p!}{j!(k-j)!(p-k)!}$. Les deux membres sont bien égaux.
4. On a, en utilisant l'égalité précédente, $\sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} = \sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{q}\binom{p-q}{k-q}$. Le premier coefficient binomial ne dépendant pas de k, on peut le sortir de la somme. On va par ailleurs effectuer le changement d'indice $j = k-q$ pour se ramener à $\binom{p}{q}\sum_{j=0}^{j=p-q}(-1)^{j+q}\binom{p-q}{j} = \binom{p}{q}\sum_{j=0}^{j=p-q}\binom{p-q}{j}1^j(-1)^{j+q}$. Comme $(-1)^{j+q} = (-1)^{j+q-2j} = (-1)^{q-j}$, on peut reconnaitre dans la somme une formule du binome de Newton égale à $(1-1)^{p-q} = 0$, d'où la nullité de la somme initiale.
5. Il faut choisir les j valeurs qui seront prises par notre application (il y a pour cela $\binom{p}{j}$ choix), et il reste ensuite à choisir une application surjective d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à j éléments, ce pour quoi on a par définition $S_{n,j}$ possibilités. Les applications prenant exactement j valeurs sont donc au nombre de $\binom{p}{j}S_{n,j}$.

6. Il y a au total p^n applications de $\{1;2;\dots;n\}$ vers $\{1;2;\dots;p\}$, et chacune d'elle prend un nombre de valeurs compris entre 1 et p. En sommant les expressions obtenues à la question précédente pour j variant de 1 à p, on obtiendra donc p^n (on ne compte manifestement pas deux fois une même application).
7. Tentons donc de calculer la somme de droite, en inversant la somme double qui apparait dès que possible :
$(-1)^p \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n = (-1)^p \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} \sum_{j=1}^{j=k} \binom{k}{j} S_{n,j} = (-1)^p \sum_{j=1}^{j=p} S_{n,j} \sum_{k=j}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{j}$
La somme de droite est justement celle dont on a montré qu'elle était nulle pour toutes les valeurs de j inférieures ou égales à $p-1$. Le seul terme restant est donc $(-1)^p S_{n,p} \sum_{k=p}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{p} = (-1)^{2p} S_{n,p} = S_{n,p}$. L'égalité demandée est donc prouvée.