TD n°7 : Révisions pour le DS5

PTSI B Lycée Eiffel

30 janvier 2014

Exercice classique

On commence par la suite. Euh, les suites, pardon.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. (a) Étudier la fonction f_n sur son domaine de définition (variations et limites).
   (b) Déterminer la position relative des courbes représentatives des fonctions f_n.
   (c) Tracer dans un même repère une allure rapide des courbes représentatives de f_1, f_2 et f_3.
   (d) Expliquer pourquoi, si $n \geqslant 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qu'on notera u_n et v_n (u_n étant la plus petite des deux), et qui vérifient $0 < u_n < n < v_n$.
2. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3$, $u_n \in]1; e[$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, en déduire la monotonie et la convergence de la suite (u_n).
   (c) En utilisant un encadrement de $\ln(u_n)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$.
3. (a) Déterminer la limite de la suite (v_n).
   (b) Calculer $f_n(n\ln(n))$, en déduire que $n\ln(n) < v_n$.
   (c) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $n > 2\ln(n)$.
   (d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$, puis que $n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.
   (e) En déduire la limite de $\dfrac{\ln(v_n)}{\ln(n)}$.

Exercice bourrin

Deux fonctions pour le prix d'une.

On donne pour ce problème les valeurs numériques suivantes : $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$; $\dfrac{3}{2e} \simeq 0,55$; $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(2)^2 \simeq 0,5$.

I. Une première étude de fonction

On définit la fonction i sur $]0; +\infty[$ par $i(x) = x^2 + x - 2 - x^2\ln(x)$.

1. Calculer la dérivée i' de la fonction i ainsi que sa dérivée seconde i''.
2. Montrer que la fonction i est prolongeable par continuité en 0. La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer les valeurs d'annulation de i''. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de i aux points correspondants.

4. Montrer que i' s'annule en une unique valeur α. Montrer que $\alpha > 1$.
5. En déduire le tableau de variations de i, et montrer que i s'annule deux fois sur $]0;+\infty[$: en 1 et en une valeur β qu'on ne cherchera pas à déterminer.
6. Tracer une allure soignée de la courbe de i en exploitant tous les calculs effectués dans cette première partie (on donne $\alpha \simeq 2$ et $\beta \simeq 3$).

II. Une deuxième étude de fonction

On définit désormais une fonction f par $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)}$

1. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer qu'on peut la prolonger par continuité en 1.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est le même que celui de $g(x) = \ln(x) - \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2}$.
4. En admettant que $\ln(x) \underset{x\to 1}{=} x - 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0$, montrer que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.
5. Calculer $g'(x)$ et montrer que son signe est le même que celui de $h(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$.
6. En constatant que $h(1) = h(-2) = 0$, factoriser h et en déduire le tableau de variations de g.
7. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution autre que 1, que l'on notera λ (mais qu'on ne sait pas calculer). En déduire le tableau de variations de f (on donne $f(\lambda) \simeq 2,9$).

Exercice franchement méchant, même à l'échelle des exos de dénombrement

Et cette fois-ci vous avez droit à un bon gros dessert.

Dans tout ce problème, on note, pour tous entiers naturels n et p, $S_{n,p}$ le nombre de surjections de l'ensemble $\{1;2;\dots;n\}$, vers l'ensemble $\{1;2;\dots;p\}$. Un exemple de telle application pour $n=3$ et $p=2$ est $f : \{1;2;3\} \to \{1;2\}$ définie par $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 1 \end{cases}$. On convient que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n,0} = 0$, et $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_{0,p} = 0$.

Première partie : exemples et généralités

1. Déterminer les valeurs de $S_{3,2}$ et $S_{4,2}$ en faisant la liste de toutes les applications convenables.
2. Que peut-on dire de $S_{n,p}$ quand $n < p$?
3. Déterminer, pour tout entier n, la valeur de $S_{n,1}$.
4. Déterminer, pour tout entier n, la valeur de $S_{n,n}$.

Deuxième partie : détermination de $S_{n,2}$

Pour alléger les notations, on pose dans cette partie, $\forall n \geqslant 2$, $u_n = S_{n,2}$.

1. Vérifier que $u_2 = 2$.
2. Prouver que, $\forall n \geqslant 2$, $u_{n+1} = 2(u_n + 1)$ (on pourra fixer l'image de $n+1$ par une application surjective de $\{1;2;\dots;n+1\}$ dans $\{1;2\}$, et considérer les possibilités pour les images des autres éléments).

3. À l'aide de cette relation de récurrence, déterminer la valeur de u_n.
4. Retrouver cette valeur à l'aide d'un raisonnement combinatoire direct, en comptant le nombre d'applications de $\{1; 2; \dots; n\}$ dans $\{1; 2\}$ qui ne sont pas surjectives.

Troisième partie : détermination de $S_{n,3}$

On pose désormais, $\forall n \geqslant 3$, $v_n = S_{n,3}$.

1. Vérifier que $v_3 = 6$.
2. Prouver que, $\forall n \geqslant 3$, $v_{n+1} = 3(v_n + u_n) = 3v_n + 3 \times 2^n - 6$.
3. Écrire un programme Pascal calculant la valeur de v_n pour un entier n choisi par l'utilisateur, à l'aide de la relation de récurrence précédente.
4. On pose $\forall n \geqslant 3$, $w_n = v_n - 3$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (w_n).
5. On pose désormais, $\forall n \geqslant 3$, $t_n = w_n + 3 \times 2^n$. Montrer que (t_n) est une suite géométrique de raison 3.
6. En déduire la valeur de t_n, puis celle de u_n et de w_n.
7. Par un raisonnement direct inspiré de celui de la question 2.4 (dénombrer le nombre d'applications non surjectives), retrouver la valeur de v_n.

Quatrième partie : détermination de $S_{n+1,n}$

1. Soit f une application surjective de $\{1; 2; \dots; n+1\}$ dans $\{1; 2; \dots; n\}$. Montrer qu'il existe un unique élément dans $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant deux antécédents par f.
2. De combien de façons peut-on choisir ces deux antécédents ?
3. En déduire que $S_{n+1,n} = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

Cinquième partie : cas général

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $\forall p \geqslant n$, $S_{n,p} = nS_{n,p-1} + S_{n-1,p-1}$.
2. À l'aide de cette relation, dresser un tableau similaire au triangle de Pascal donnant les valeurs de $S_{n,p}$ pour des entiers n et p inférieurs ou égaux à 5.
3. Soit j un entier inférieur ou égal à $p-1$, et k tel que $j \leqslant k \leqslant p$, prouver que
$$\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j}$$
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{q} = 0$ (on pourra faire apparaître une formule du binôme de Newton).
5. Déterminer en fonction de $S_{n,k}$, le nombre d'applications de $\{1; 2; \dots; n\}$ dans $\{1; 2; \dots; p\}$ prenant exactement j valeurs différentes (j étant ici un entier inférieur ou égal à p).
6. En déduire que $p^n = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p}\binom{p}{j}S_{n,j}$.
7. Prouver à l'aide des deux résultats précédents que $S_{n,p} = (-1)^p \displaystyle\sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n$ (calculer la somme de droite en remplaçant k^n par la formule obtenue à la question 6).