TD n°6 : Révisions pour le DS4

PTSI B Lycée Eiffel

9 janvier 2014

Apéritif

Résoudre le système suivant, en distinguant des cas selon les valeurs du paramètre m :

$$\begin{cases} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \end{cases}$$

Hors-d'œuvre

On cherche dans cet exercice à étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \ln(n) - \ln(n-1)$.
3. En déduire que, $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n)$.
4. En déduire la nature de la suite (u_n).
5. Retrouver ce résultat en commençant par démontrer que, $\forall n \geqslant 1$, $u_{2n} - u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
6. On pose $v_n = u_n - \ln(n)$. Montrer que la suite (v_n) converge (on ne cherchera pas à déterminer sa limite), et en déduire qu'on peut écrire $u_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$, où $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.
7. On pose désormais $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
   (a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire la nature de la suite (S_n).
   (b) Montrer que $S_{2n} = u_{2n} - u_n$.
   (c) En utilisant le résultat de la question 5, déterminer la limite l de la suite (S_n).
   (d) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $|S_n - l| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Plat de résistance

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** si tous ses coefficients sont positifs et si, $\forall i \in \{1; \dots ; n\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. On considèrera dans ce problème qu'une suite de matrice $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ **converge** vers la matrice A si chacun des coefficients $(A_p)_{i,j}$ a pour limite $A_{i,j}$ quand n tend vers $+\infty$.

I. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère dans cette première partie la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $A^n = a_n A + b_n I$.
3. Déterminer des relations de récurrence sur les suites (a_n) et (b_n), et en déduire les valeurs de a_n et b_n.
4. Déterminer explicitement la matrice A^n.
5. Montrer que la suite de matrices (A^n) converge, et que sa limite est une matrice stochastique.

II. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans cette deuxième partie, on pose $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les puissances de la matrice J.
2. Écrire B comme combinaison des matrices I_3 et J, et en déduire les puissances de la matrice B à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. Montrer que la suite (B^n) converge, et que sa limite est une matrice stochastique.

III. Étude générale des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère désormais une matrice stochastique d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$, avec $(a, b) \in [0, 1]^2$.

1. Calculer A^p dans le cas où $a = b = 1$, et $a = b = 0$. On exclut ces deux cas particuliers pour les questions suivantes.
2. On considère le polynôme $P = (X - 1)(X - a - b + 1)$, calculer $P(A)$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
4. En déduire les puissances de la matrice A.
5. Montrer que la suite (A^p) converge vers une limite à préciser.

IV. Une étude plus générale.

On considère désormais une matrice stochastique (à n lignes et n colonnes) dont tous les coefficients sont strictement positifs. On note m le plus petit coefficient de A ; $\alpha_j^{(p)}$ le plus petit coefficient de la colonne numéro j de la matrice A^p, et $\beta_j^{(p)}$ le plus grand coefficient de cette même colonne. Enfin, on note $\delta_j^{(p)} = \beta_j^{(p)} - \alpha_j^{(p)}$.

1. Montrer que si la suite (A^p) converge, sa limite B est une matrice stochastique, et vérifie $B^2 = B$ et $BA = AB$.
2. Montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \{1; \dots; n\}$, $\alpha_j^{(p)} \leqslant \alpha_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p)}$, et $\delta_j^{(p+1)} \leqslant (1 - 2m)\delta_j^{(p)}$.
3. En déduire que la suite (A^p) converge. Que peut-on dire des lignes de la matrice limite B ?
4. Déterminer la limite de la suite (A^p) lorsque $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ (on pourra exploiter le fait que A est une matrice symétrique).

Et comme vous n'avez pas été assez rapides pour faire tout le reste, vous êtes privés de dessert !