TD n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

28 novembre 2013

Exercice 1

1. Calculons ! On trouve facilement $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}$, puis $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) \simeq 0.69$, et même $u_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4} \simeq 0.79$. Beaucoup moins facilement, on peut calculer $u_3 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \simeq 0.84$ (je ne refais pas le calcul puisque c'est un exemple vu en cours !).
Pour s'amuser un peu, on peut calculer u_4. Commençons par factoriser le dénominateur t^4+1. les racines de ce polynômes sont les racines quatrièmes de -1, qui ont pour module 1 (comme -1) et pour argument $\frac{\pi}{4}$ modulo $\frac{\pi}{2}$ pusique -1 a pour ardument π. elles sont donc égales à $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. En regroupant les racines conjugués pour retrouver des facteurs réels, on obtient $t^4+1 = (t-e^{i\frac{\pi}{4}})(t-e^{-i\frac{\pi}{4}})(t-e^{i\frac{3\pi}{4}})(t-e^{-i\frac{3\pi}{4}}) = \left(t^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1\right)\left(t^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+1\right) = (t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)$. On peut donc décomposer en éléments simple sous la forme $\frac{1}{1+t^4} = \frac{at+b}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{ct+d}{t^2-\sqrt{2}t+1}$. En regardant en 0, on trouve $b+d=1$; en multipliant par t et en regardant la limite en $+\infty$, on trouve $a+c=0$. Et pour vous faire plaisir, une bidouille immonde pour obtenir plus de renseignements : en remplaçant t par $-t$, on trouve dans l'équation initiale $\frac{1}{1+t^4} = \frac{-at+b}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{-ct+d}{t^2+\sqrt{2}t+1}$, ce qui nous conduit « par identification » à affirmer que $-a=c$, et surtout $b=d$. On a donc $b=d=\frac{1}{2}$. Une dernière information, par exemple en $t=1$ où $\frac{1}{2} = \frac{a+b}{2+\sqrt{2}} + \frac{c+d}{2-\sqrt{2}} = \frac{(a+b)(2-\sqrt{2})+(c+d)(2+\sqrt{2})}{2}$, donne $1 = 2\sqrt{2}c+2$, soit $c = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. On en déduit donc que $\frac{1}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{\sqrt{2}}{(t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\right)$, ce qui se primitive « facilement » en $\frac{1}{4\sqrt{2}}(\ln(t^2+\sqrt{2}t+1) - \ln(t^2-\sqrt{2}t+1) + 2\arctan(\sqrt{2}t+1) + 2\arctan(\sqrt{2}t-1))$. On en déduit que $u_4 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\ln(2+\sqrt{2}) - \ln(2-\sqrt{2}) + 2\arctan(1+\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}-1)) \simeq 0.87$ (on peut simplifier le résultat si on a des connaissances pointues en trigonométrie classique et hyperbolique, mais on s'en passera !). Bon, on va peut-être s'arrêter là ?

2. Il suffit en fait de constater que, sur $[0,1]$, on aura toujours $t^n \geqslant t^{n+1}$, donc $\frac{1}{1+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t^{n+1}}$, et il suffit d'appliquer donné en début d'énoncé pour en déduire que $u_n \leqslant u_{n+1}$. Autrement dit, la suite (u_n) est croissante (ce qui est cohérent avec les valeurs calculées à la première question).

3. Pour montrer ce genre d'encadrement, on commence par encadrer la fonction à l'intérieur de l'intégrale. Commençons par écrire $1-u_n = \int_0^1 1\ dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\ dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\ dt$ en regroupant les deux intégrales. Or, $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant 1+t^n \geqslant 1$, donc $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^n} \leqslant t^n$. En appliquant le résultat de l'énoncé, on peut mettre des intégrales autour de tout ça : $\int_0^1 0\ dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\ dt \leqslant \int_0^1 t^n\ dt$. L'intégrale de gauche est évidemment nulle, celle de droite vaut $\frac{1}{n+1}$ par intégration directe, d'où l'encadrement demandé. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, une application immédiate du théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} 1-u_n = 0$, donc (u_n) converge vers 1.
4. On effectue une IPP intelligente sur $1-u_n$, en posant $v'(t) = \frac{t^{n-1}}{1+t^n}$, donc $u(t) = \frac{\ln(1+t^n)}{n}$, ce qui laisse $u(t) = t$ et $u'(t) = 1$. On obtient alors $1-u_n = \left[\frac{t\ln(1+t^n)}{n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+t^n)}{n}\ dt$, ce qui donne directement la formule annoncée.
5. Il suffit en fait de connaitre la majoration classique $\ln(1+x) \leqslant x$, qui est valable sur $]-1,+\infty[$. Si on ne la connait pas, on la redémontre en quelques secondes : en posant $f(x) = \ln(1+x)-x$, on a $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$, donc la fonction admet un maximum en 0, et comme $f(0) = 0$, elle est toujours négative. On en déduit ici que $0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+t^n)\ dt \leqslant \int_0^1 t^n = \frac{1}{n+1}$.
6. Il suffit de multiplier par n l'égalité de la question 4, puis d'appliqer l'encadrement de la 5 pour trouver $\ln(2) - \frac{1}{n+1} \leqslant n(1-u_n) \leqslant \ln(2)$, ce qui prouve à l'aide d'une nouvelle application du théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} n(1-u_n) = \ln(2)$.

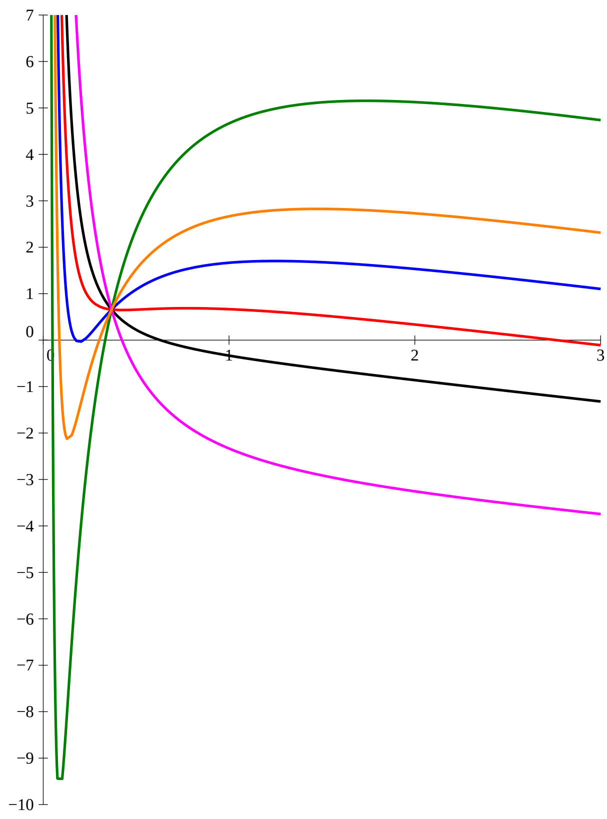
Exercice 2

1. Pour que f puisse vérifier l'équation de départ, il faut certainement qu'elle soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Réécrivons cette équation un peu différemment : $2f'(x) = \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) - 1$. Le membre de droite est obtenu comme produit et composée de fonctions dérivables, donc il constitue une fonction dérivable, ce qui prouve que f' est dérivable. La fonction f est donc deux fois dérivable.
2. Pour obtenir du second ordre, dérivons l'équation de départ : $-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = 2x(2f'(x)+1) + 2x^2f''(x)$. Reste à exprimer le membre de gauche plus simplement. Pour cela, on reprend la relation obtenue dans la première question pour $2f'(x)$ et on l'applique à $\frac{1}{x}$ (attention à bien modifier également le $\frac{1}{x^2}$ à droite) : $2f'\left(\frac{1}{x}\right) = x^2f(x) - 1$. On peut remplacer pour obtenir $-\frac{1}{x^2} \times \frac{x^2f(x)-1}{2} = 4xf'(x) + 2x + 2x^2f''(x)$, soit $-\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2x^2} = 4xf'(x) + 2x + 2x^2f''(x)$. La fonction f est donc solution de l'équation linéaire $2x^2f'' + 4xf' + \frac{1}{2}f = \frac{1}{2x^2} - 2x$.
3. Autrement dit, on pose $f(x) = g(\ln(x))$, ce qui est toujours possible sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut alors dériver deux fois : $f'(x) = \frac{1}{x}g'(\ln(x))$, puis $f''(x) = \frac{1}{x^2}g''(\ln(x)) - \frac{1}{x^2}g'(\ln(x))$. Remettons tout ça dans l'équation obtenue à la question précédente : $2g''(\ln(x)) - 2g'(\ln(x)) + 4g'(\ln(x)) + \frac{1}{2}g(\ln(x)) = \frac{1}{2x^2} - 2x$. En posant $t = \ln(x)$, soit $x = e^t$, la fonction g est donc solution de

l'équation à coefficients constants $2g''(t) + 2g'(t) + \frac{1}{2}g(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^t$.

4. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $2r^2 + 2r + \frac{1}{2} = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 4 = 0$, et admet donc pour racine double $r = -\frac{1}{2}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $g_h : t \mapsto (A+Bt)e^{-\frac{t}{2}}$. Pour déterminer une solution particulière de l'équation complète, utilisons le principe de superposition. On cherche d'abord une solution à l'équation $2g'' + 2g' + \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}e^{-2t}$ sous la forme $y_1(t) = ae^{-2t}$. Cela implique $y_1'(t) = -2ae^{-2t}$ et $y_1''(t) = 4ae^{-2t}$, donc y_1 est solution si $8ae^{-2t} - 4ae^{-2t} + \frac{a}{2}e^{-2t} = \frac{1}{2}e^{-2t}$, soit $a = \frac{1}{9}$. De même, on cherche une solution à l'équation $2g'' + 2g' + \frac{1}{2}g = 2e^t$ sous la forme $y_2(t) = be^t$, avec cette fois la condition $2b + 2b + \frac{1}{2}b = 2$, donc $b = \frac{4}{9}$. Une solution particulière de l'équation est donc donnée par $g_p(t) = \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{4}{9}e^t$, et les solutions complètes de l'équation sont les fonctions $g : t \mapsto (A + Bt)e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{4}{9}e^t$.
5. En remontant le changement de variables effectué, on doit avoir $f(x) = g(\ln(x)) = \frac{A + B\ln(x)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{9x^2} - \frac{4}{9}x$.
6. Comme on a travaillé uniquement par implications, il reste à vérifier si les fonctions obtenues sont vraiment solutions du problème. D'un côté, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}(A - B\ln(x)) + \frac{x^2}{9} - \frac{4}{9x}$; de l'autre $f'(x) = \frac{\frac{B}{\sqrt{x}} - \frac{A+B\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x} - \frac{2}{9x^3} - \frac{4}{9} = \frac{2B - A - B\ln(x)}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{9x^3} - \frac{4}{9}$, donc $x^2(2f'(x)+1) = \sqrt{x}(2B - A - B\ln(x)) - \frac{4}{9x} - \frac{8}{9}x^2 + x^2 = \sqrt{x}(2B - A - B\ln(x)) - \frac{4}{9x} + \frac{x^2}{9}$. Les deux expressions coincident à l'unique condition que $2B - A = A$, soit $A = B$. Les fonctions solutions du problème initial sont donc toutes les fonctions $f : x \mapsto \frac{A(1 + \ln(x))}{\sqrt{x}} + \frac{1}{9x^2} - \frac{4}{9}x$.

   Et même si ce n'était pas demandé, on peut tracer quelques allures de courbes, ici en noir la courbe correspondant à $A = 0$, en rouge $A = 1$, en bleu $A = 2$, en orange $A = 3$, en vert $A = 5$, en rose $A = -2$. Toutes les courbes passent par un point commun pour $x = \frac{1}{e}$ (puisqu'alors $1 + \ln(x) = 0$), d'ordonnée $\frac{e^2}{9} - \frac{4}{9e} \simeq 0.66$.



Problème

Première partie : Une étude de fonction.

1. La fonction f est définie si $\dfrac{1-x}{x} \geqslant 0$. Un petit tableau de signes donne $\mathcal{D}_f =]0;1]$ (attention à bien mettre les crochets dans le bon sens).

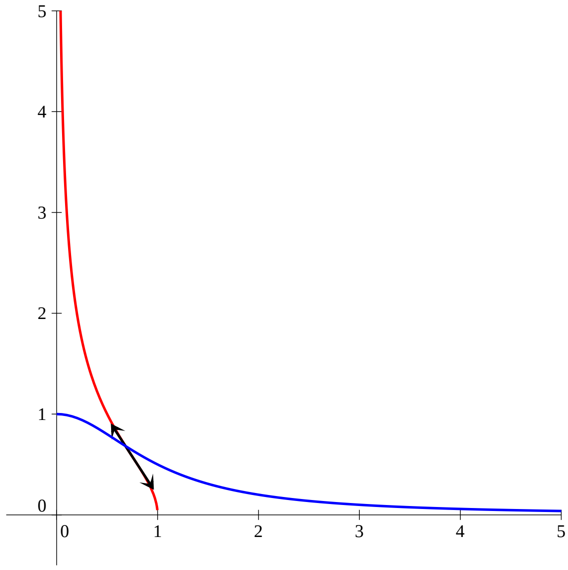
2. La fonction est dérivable sur $]0;1[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{\frac{-x-(1-x)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = -\dfrac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$. Cette dérivée étant toujours négative, la fonction f est strictement décroissante. Comme de plus $f(1) = 0$, et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, f est bijective de $]0;1]$ sur $\mathbb{R}^+$.

3. Cherchons à résoudre l'équation $f(x) = y$, soit $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = y$, on peut élever au carré pour obtenir $\dfrac{1-x}{x} = y^2$, soit $1-x = xy^2$, puis $x(y^2+1) = 1$ et $x = \dfrac{1}{1+y^2}$. On a donc $g : y \mapsto \dfrac{1}{1+y^2}$, qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]0;1]$ ($g(0) = 1$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = 0$). Le théorème de la bijection nous assure que g est décroissante tout comme f.

4. Calculons donc (en reprenant la dernière expression de f') la dérivée seconde $f''(x) = \dfrac{4x\sqrt{\frac{1}{x}-1} - \frac{2x^2}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}}{4x^4(\frac{1}{x}-1)} = \dfrac{4x(\frac{1}{x}-1)-1}{4x^4(\frac{1}{x}-1)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3-4x}{4x^4(\frac{1}{x}-1)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée seconde est du signe de $3-4x$, et s'annule pour $x = \dfrac{3}{4}$. On calcule donc $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; et $f'\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{-1}{\frac{18}{16}\sqrt{\frac{1}{3}}} = -\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$. L'équation de la tangente au point correspondant est donc $y =$

$-\frac{8\sqrt{3}}{9}\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{8\sqrt{3}}{9}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{16\sqrt{3}}{9}x+\sqrt{3}.$

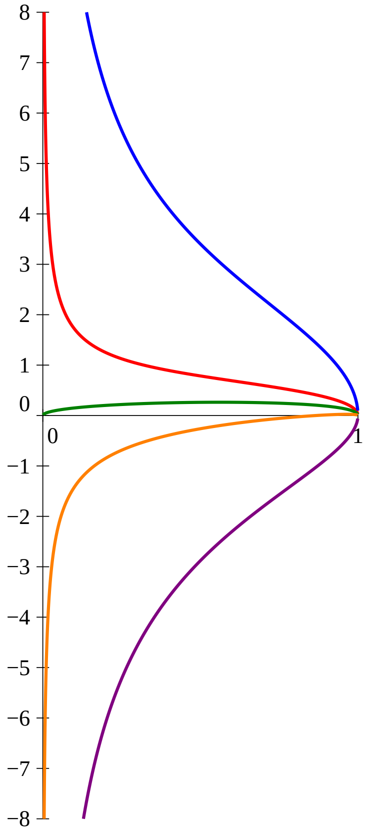
5. Voici une allure, avec la tangente calculée à la question précédente (f en rouge, g en bleu) :



Deuxième partie : Une équation différentielle linéaire.

1. La normalisation faisant apparaitre deux valeurs interdites, et le membre de droite n'est pas défini entre -1 (inclus) et 0, donc on résout séparément sur $]-\infty;-1[$; sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
2. Mettons au même dénominateur le membre de droite : $\frac{a}{x}+\frac{b}{1-x} = \frac{a-ax+bx}{x(1-x)}$. En identifiant, ceci est égal à $\frac{1}{2x(1-x)}$ si $a=\frac{1}{2}$ et $a-b=0$, soit $b=\frac{1}{2}$. On en déduit que $\frac{1}{2x(1-x)} = \frac{1}{2x}+\frac{1}{2(1-x)}$. L'équation homogène normalisée $y'+\frac{1}{2x(1-x)}y=0$ a donc pour solutions sur $]0;1[$ les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\frac{1}{2}\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(1-x)} = K_1\sqrt{\frac{1-x}{x}} = K_1 f(x)$. Sur $]1;+\infty[$, on obtient de même $y_h(x) = K_2\sqrt{\frac{x-1}{x}}$; et sur $]-\infty;-1[$, $y_h(x) = K_3\sqrt{\frac{1-x}{-x}} = K_3\sqrt{\frac{x-1}{x}}$.
3. Effectuons par exemple le calcul sur $]0;1[$, on cherche donc $y_p(x)=K(x)f(x)$, d'où $y_p'(x) = K'(x)f(x) - \frac{K(x)}{2x^2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}$. La fonction y_p est alors solution si $2x(1-x)K'(x)f(x) - \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x}K(x) + K(x)f(x) = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}$, donc $K'(x) = \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\sqrt{\frac{x}{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. On en déduit que $K(x) = \frac{1}{2}\arcsin(x)$ convient, ce qui donne pour solutions de l'équation complète les fonctions $y(x) = \left(\frac{1}{2}\arcsin(x)+K_1\right)\sqrt{\frac{1-x}{x}}$. De même, sur $]1;+\infty[$, on va trouver la condition $K'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$, ce qui correspond à la dérivée de la réciproque de la fonction sh que nous n'avons pas étudiée en cours (on peut tout de même réussir à trouver une expression explicite en étant motivés, je vous laisse vérifier que $K(x) = \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ convient). On a le même problème sur le dernier intervalle de résolution (même solution particulière au signe près). Il n'y évidemment pas de solution définie sur $\mathbb{R}$ puisque l'équation ne peut pas avoir de sens sur l'intervalle $]-1,0[$.

4. En $\frac{1}{2}$, on a $\arcsin(x) = \frac{\pi}{6}$, donc $y(x) = \frac{\pi}{12} + K_1$ (la racine carrée vaut simplement 1), il faut donc choisir $K_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. On a alors $y(x) = \left(\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{\pi}{6}\right)\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.
5. Tout ce qu'on peut dire assez facilement, c'est que toutes les fonctions vont tendre vers 0 en 1, et auront une limite égale à $\pm\infty$ (selon le signe de K_1) si $K_1 \neq 0$. Ensuite, les problèmes de Cauchy dans $]0,1[$ ne pouvant avoir qu'une seule solution, les courbes ne peuvent pas se couper ailleurs que pour $x = 1$. On ne peut rien dire sur les variations de la fonction, mais la présence d'une tangente verticale en $x = 1$ est assurée si $K \geqslant 0$. À partir de ces maigres informations, si on trace des courbes relativement simples, on ne sera pas loin de la réalité (en rouge, la solution de la question précédente, en vert celle correspondant à $K = 0$, qui a une limite nulle en 0 mais c'est difficile à prouver) :



Une équation non linéaire.

1. Si y est constante, sa dérivée est nulle, donc elle vérifie $2y(1-y) = 0$, c'est-à-dire $y = 0$ ou $y = 1$.
2. Si y est à valeurs dans $]0;1[$, on aura toujours $2y(1-y) \geqslant 0$, donc pour vérifier l'équation on doit nécessairement avoir $xy' \leqslant 0$, d'où $y' \leqslant 0$ (puisque $x \in]0;1[$). La fonction y est donc décroissante.
3. Une fonction continue et monotone est toujours bijective, notons $z = y^{-1}$, on sait que $z'(t) = \frac{1}{y'(z(t))}$ (où on pose $t = y(x)$), ou encore $y'(z(t)) = \frac{1}{z'(t)}$, avec. En remplaçant x par $z(t)$ dans l'équation (F), on obtient $z(t)y'(z(t)) + 2z(t)(1 - z(t)) = 0$, soit $\frac{z(t)}{z'(t)} + 2t(1-t) = 0$. On peut multiplier par $z'(t)$ pour trouver $z(t) + 2t(1-t)z'(t) = 0$. On reconnait bien l'équation annoncée.

4. La variable t ayant été supposée appartenir à $]0;1[$, on reprend les résultats de la partie précédente : $z(t) = Kf(t) = K\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}$. On en déduit que $x = K\sqrt{\dfrac{1-y(x)}{y(x)}}$, soit $\dfrac{x^2}{K^2}y(x) = 1-y(x)$, donc comme annoncé $y(x) = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{K})^2}$. On peut toujours prendre une constante K strictement positive, puisque 0 est exclu, et K et $-K$ donnent la même fonction pour y. Les valeurs obtenues pour $y(x)$ sont manifestement positives, et tout aussi manifestement plus petites que 1 (puisque le dénominateur est strictement supérieur à 1), donc toutes les solutions trouvées conviennent.
5. Cette condition impose $1+\left(\dfrac{x_0}{K}\right)^2 = \dfrac{1}{\alpha}$, soit $\dfrac{x_0}{K} = \sqrt{\dfrac{1}{\alpha}-1}$ (tout est positif), donc $K = \dfrac{x_0}{f(\alpha)}$.
6. Pour avoir une allure plus précise de la courbe, on va chercher les valeurs d'annulation de la dérivée seconde comme dans la première partie (pour les curieux, on appelle cela des points d'inflexion). Écrivons donc $y(x) = \dfrac{K^2}{K^2+x^2}$, et dérivons deux fois : $y'(x) = -\dfrac{2K^2x}{(K^2+x^2)^2}$ (les solutions sont donc décroissantes sur $\mathbb{R}^{+*}$), et $f''(x) = \dfrac{-2K^2(K^2+x^2)^2+4x(K^2+x^2)(2K^2x)}{(K^2+x^2)^4} = \dfrac{-2K^4-2K^2x^2+8K^2x^2}{(K^2+x^2)^3} = \dfrac{2K^2(3x^2-K^2)}{(K^2+x^2)^3}$. Cette dérivée seconde s'annule si $x = \dfrac{K}{\sqrt{3}}$. Remarquons que $y\left(\dfrac{K}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3}{4}$, et $f'\left(\dfrac{K}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{9}{8K\sqrt{3}}$. Si on impose la condition $f(2) = \dfrac{1}{2}$, on trouve $K = \dfrac{2}{f(\frac{1}{2})} = 2$, donc le point d'annulation de la dérivée seconde est atteint pour $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, et $f'\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{9}{16\sqrt{3}}$. On peut tracer la courbe suivante :