

TD n°5 : Révisions pour le DS3

PTSI B Lycée Eiffel

28 novembre 2013

Exercice 1

On cherche à étudier la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$. On pourra utiliser dans tout l'exercice le résultat classique suivant : si $f(t) \leq g(t)$ pour tout réel $t \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

1. Calculer les premiers termes de la suite u_n (on s'arrête quand ça devient vraiment trop dur).
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) .
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, en déduire la limite de la suite (u_n) .
4. Montrer que $1 - u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \int_0^1 \frac{\ln(1+t^n)}{n} dt$.
5. Montrer à l'aide d'une majoration de la fonction à l'intérieur de l'intégrale que $0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \leq \frac{1}{n+1}$.
6. En déduire la limite de $n(1 - u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On cherche dans cet exercice toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(2f'(x) + 1)$. On va pour cela raisonner par analyse et synthèse (c'est-à-dire qu'on va chercher à déterminer le plus de caractéristiques possibles des solutions du problème, de manière à leur donner une forme précise, et on vérifiera ensuite que les fonctions de cette forme sont effectivement solutions).

1. Soit donc f une telle fonction. Prouver que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
2. Déterminer une équation linéaire du second ordre vérifiée par f .
3. En posant $g(t) = f(e^t)$, déterminer une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont g est solution.
4. Résoudre cette équation.
5. En déduire les solutions possibles de l'équation de départ.
6. Conclure.

Problème

Le but de ce problème est d'étudier une équation du premier ordre non linéaire par une méthode originale : en prouvant que les réciproques des solutions sont elles-mêmes solutions d'une équation différentielle linéaire.

Première partie : Une étude de fonction.

On considère dans cette partie la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Étudier les variations de la fonction f , en déduire qu'elle est bijective de \mathcal{D}_f vers un intervalle à préciser.
3. Donner une expression simple de la réciproque g de la fonction f , ainsi que le tableau de variations de la fonction g .
4. Calculer la dérivée seconde f'' de f , et calculer l'équation des tangentes éventuelles aux points d'annulation de f'' (on admettra qu'en ces points, la position relative de la tangente et de la courbe change au point d'intersection).
5. Tracer soigneusement les allures des courbes représentatives de f et de g dans un même repère (en tenant notamment compte des calculs effectués à la question précédente).

Deuxième partie : Une équation différentielle linéaire.

On considère dans cette partie l'équation différentielle $(E) : 2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1+x}}$.

1. Sur quels intervalles va-t-on résoudre l'équation (E) ?
2. Déterminer deux constantes a et b telles que $\frac{1}{2x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$, et en déduire les solutions de l'équation homogène associée à (E) .
3. Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante, et en déduire les solutions de l'équation complète. Existe-t-il des solutions définies sur \mathbb{R} ?
4. Déterminer l'unique solution définie sur $]0; 1[$ et vérifiant $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
5. Tracer une allure de cette solution, ainsi que de quelques autres solutions définies sur $]0; 1[$ (on ne demande pas une étude détaillée de toutes les fonctions, mais une explication rapide de l'allure des courbes), dans un même repère.

Une équation non linéaire.

On va désormais s'intéresser à l'équation non linéaire $(F) : xy' + 2y(1-y) = 0$, qu'on cherche à résoudre sur \mathbb{R}^{+*} .

1. Déterminer les fonctions constantes solutions de l'équation (F) .
2. Pour tout la suite, on cherchera à décrire les solutions de l'équation à valeurs dans $]0; 1[$. Montrer que ces solutions sont nécessairement décroissantes.
3. En déduire qu'elles sont bijectives, et que leurs réciproques sont solutions de l'équation homogène associée à (E) .
4. En déduire que les solutions cherchées sont de la forme $y(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{k}\right)^2}$, où k est une constante strictement positive. Quelles sont les valeurs de k convenables (pour lesquelles y est effectivement à valeurs dans $]0; 1[$) ?
5. Montrer que, si on fixe une valeur de x_0 strictement positive, et un réel $\alpha \in]0; 1[$, il existe une unique solution parmi les précédentes vérifiant $y(x_0) = \alpha$.
6. Tracer une allure soignée de la courbe de la solution vérifiant $y(2) = \frac{1}{2}$.