TD n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

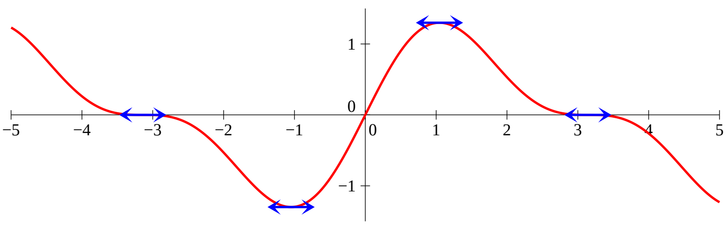
7 novembre 2013

Exercice 1

- Calculons $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2(j+1)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{4}$.
- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, assez clairement 2π-périodique, et impaire (puisque produit du sinus qui est impair, par $1+\cos(x)$ qui est pair). On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$. Sur cet intervalle, f est dérivable de dérivée $f'(x) = \cos(x)(1+\cos(x)) - \sin(x) \times \sin(x) = \cos(x) + \cos^2(x) - (1-\cos^2(x)) = 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1$. Posons $X = \cos(x)$. Le trinôme $2X^2 + X - 1$ a pour racine évidente $X = -1$ et pour deuxième racine $X = \dfrac{1}{2}$. Sur notre intervalle d'étude, la dérivée s'annule donc en 0 et en $\dfrac{\pi}{3}$. Après avoir calculé $f(0) = f(\pi) = 0$ et surtout $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

Et la courbe qui va avec :



Exercice 2

1. Il faut résoudre l'équation $\dfrac{z^2}{z-2i} = 1+i$, soit $z^2 - (1+i)z - 2 + 2i = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = (1+i)^2 - 4(-2+2i) = 1 + 2i - 1 + 8 - 8i = 8 - 6i$. On recherche une racine carrée du discriminant sous la forme $\delta = a + ib$. La condition $\delta^2 = \Delta$ donne $a^2 - b^2 + 2iab = 8 - 6i$, soit $a^2 - b^2 = 8$ et $2ab = -6$. On ajoute la condition sur le module : $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{36+64} = 10$. En additionnant la première et la troisième équation obtenues, on trouve $2a^2 = 18$, en les soustrayant $2b^2 = 2$. On en déduit que $a = \pm 3$ et $b = \pm 1$, soit en utilisant le fait que a et b sont de signe contraire (deuxième équation), $\delta = 3 - i$ ou $\delta = -3 + i$. Les deux

solutions de l'équation initiale sont donc $z_1 = \dfrac{1+i+3-i}{2} = 2$ et $z_2 = \dfrac{1+i-3+i}{2} = i-1$, qui sont donc les deux antécédents de $1+i$ par f.

2. Le principe est le même : l'équation $f(z) = w$ se ramène à $z^2 - wz + 2iw = 0$, elle a toujours des solutions. Plus précisément, l'équation aura deux solutions, sauf si son discriminant est nul, auquel cas elle n'en aura qu'une. Le discriminant en question vaut $\Delta = w^2 - 8iw$, il s'annule lorsque $w = 0$ ou $w = 8i$. Les deux nombres complexes 0 et $8i$ ont donc un unique antécédent par f (il s'agit de 0 pour 0 et de $4i$ pour $8i$), tous les autres en ont deux.
3. L'application f est surjective (tout nombre complexe a au moins un antécédent, mais pas injective puisque beaucoup d'éléments ont deux antécédents par f.

Problème 1 : résolution d'équations du troisième degré

I. Un cas particulier

1. Puisque $z = Z + 2$, on peut écrire $(Z+2)^3 - 6(Z+2)^2 + 9(Z+2) - 1 = 0$, soit $Z^3 + 6Z^2 + 12Z + 8 - 6Z^2 - 24Z - 24 + 9Z + 18 - 1 = 0$, donc $Z^3 - 3Z + 1 = 0$.
2. Encore du calcul peu subtil, $(u+v)^3 - 3(u+v) + 1 = 0$ donne $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u - 3v + 1 = 0$. En factorisant ce qu'on peut par $u+v$, $u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 3(u+v) + 1 = 0$, ce qui donne bien $u^3 + v^3 + 3(uv-1)(u+v) + 1 = 0$.
3. Si on impose $uv = 1$, on a donc $u^3 + v^3 + 1 = 0$, soit $u^3 + v^3 = -1$. Comme par ailleurs $u^3v^3 = (uv)^3 = 1^3 = 1$, on connait le produit P et la somme S des deux nombres u et v, ils sont donc solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$, soit ici $x^2 + x + 1 = 0$.
4. L'équation a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, et admet donc pour racines complexes conjuguées $x_1 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $x_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. On peut donc poser $u^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $v^3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ (ou le contraire, ça n'a aucune importance). Les valeurs possibles pour u sont donc les racines cubiques de $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, c'est-à-dire $u_1 = e^{i\frac{2\pi}{9}}$; $u_2 = e^{i\frac{8\pi}{9}}$ et $u_3 = e^{i\frac{14\pi}{9}}$. De même, les valeurs possibles de v sont $v_1 = e^{-i\frac{2\pi}{9}}$; $v_2 = e^{-i\frac{8\pi}{9}}$ et $v_3 = e^{-i\frac{14\pi}{9}}$.
5. Avec la condition ajoutée $uv = 1$, les trois couples possibles sont (u_1, v_1) ; (u_2, v_2) et (u_3, v_3), qui donnent donc les trois valeurs possible de Z : $Z_1 = u_1 + v_1 = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$; $Z_2 = u_2 + v_2 = 2\cos\left(\dfrac{8\pi}{9}\right)$ et $Z_3 = u_3 + v_3 = 2\cos\left(\dfrac{14\pi}{9}\right)$. On en déduit les solutions de l'équation initiale : $z_1 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$; $z_2 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{8\pi}{9}\right)$ et $z_3 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{14\pi}{9}\right)$. Remarquons que, malgré l'utilisation des nombres complexes, on obtient ici trois solution réelles.

II. Généralisation

1. Développons comme précédemment $(Z-k)^3 + a(Z-k)^2 + b(Z-k) + c = Z^3 - 3kZ^2 + 9k^2Z - k^3 + aZ^2 - 2akZ + ak^2 + bZ - bk + c = Z^3 + (a-3k)Z^2 + (9k^2 - 2ak + b)Z - k^3 + ak^2 - bk + c$. Si on veut faire disparaitre le terme en Z^2, il suffit de prendre $k = \dfrac{a}{3}$. On obtiendra alors $p = 9k^2 - 2ak + b = a^2 - 2\dfrac{a^2}{3} + b = \dfrac{a^2}{3} + b$; et $q = -k^3 + ak^2 - bk + c = -\dfrac{a^3}{27} + \dfrac{a^3}{9} - \dfrac{ab}{3} + c = -\dfrac{2a^2}{27} + \dfrac{ab}{3} + c$.
2. On procède comme dans la première partie : $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$ donne $u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = 0$, soit $u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0$. En posant $uv = -\dfrac{p}{3}$, on fait disparaitre le terme du milieu pour mettre sous la forme demandée.

3. Comme tout à l'heure, on a $U + V = -q$, et $UV = (uv)^3 = -\frac{p^3}{27}$.

4. Les nombres U et V sont donc solutions de l'équation $x^2+qx-\frac{p^3}{27}$, qui a pour discriminant $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$. Si $\Delta > 0$, on trouvera donc $U = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ et $V = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Si $\Delta < 0$, on aura des valeurs complexes conjuguées $U = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$, et $V = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$. Si $\Delta = 0$, on aura $U = V$, ce qui n'est pas gênant pour la suite de la résolution. On cherche ensuite les racines cubiques (complexes) des deux nombres U et V, on les apparie de façon à avoir un produit égal à $-\frac{p}{3}$ (il y aura toujours trois couples possibles), en calculant les sommes $u + v$ pour chacun des trois couples on trouve trois valeurs possibles pour Z, qui donnent les trois solutions $z = Z + k$.

5. Allons-y en commençant par poser $Z = z - 1$, on a donc $(Z + 1)^3 - 3(Z + 1)^2 + (9 - 6i)(Z + 1) - 5 + 12i = 0$, soit $Z^3 + 3Z^2 + 3Z + 1 - 3Z^2 - 6Z - 3 + (9 - 6i)Z + 9 - 6i - 5 + 12i = 0$. En regroupant un peu, $Z^3 + 6(1 - i)Z + 2 + 6i = 0$. On pose maintenant $Z = u + v$ pour obtenir $u^3+3u^3v+3uv^2+v^3+6(1-i)(u+v)+2+6i = 0$, soit $u^3+v^3+3(u+v)(uv+2(1-i))+2+6i = 0$. On va donc imposer la condition supplémentaire $uv = 2i-2$, et poser $U = u^3$ et $V = v^3$ pour obtenir les équations $U+V = -2-6i$, et $UV = (2i-2)^3 = -8i+24+24i-8 = 16+16i$. Les nombres U et V sont solution de l'équation du second degré $x^2+(2+6i)x+16+16i = 0$. Son discriminant est égal à $\Delta = (2+6i)^2-64-64i = 4+24i-36-64-64i = -96-40i$. On cherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, ce qui donne les conditions $a^2 - b^2 = -96$ et $2ab = -40$. On a alors le choix entre être très courageux et calculer le module de Δ (qui vaut 104), ou bien être observateur et remarquer que $a = 2$ et $b = -10$ est un couple solution. On peut donc prendre $\delta = 2 - 10i$, et trouver les solutions $U = \frac{-2 - 6i + 2 - 10i}{2} = -8i$ et $V = \frac{-2 - 6i - 2 + 10i}{2} = -2 + 2i$. Ouf, on obtient deux nombres dont les racines cubiques sont faciles à calculer. Pour u, on peut prendre $u_1 = 2i$, $u_2 = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3}-i$ et $u_3 = 2ie^{i\frac{4\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}-i$. Pour $V = -2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, on obtient $v_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$; $v_2 = (1+i)e^{i\frac{2\pi}{3}} = (1+i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $v_3 = (1+i)e^{i\frac{4\pi}{3}} = (1+i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$. Comme $2i(1+i) = -2+2i$, le couple (u_1, v_1) est une solution correcte, qui mène à $Z = u_1 + v_1 = 1 + 3i$. De même, $u_2 + v_3 = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}} \times (1 + i)e^{i\frac{4\pi}{3}} = -2 + 2i$, donc $Z = u_2 + v_3 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{-3-\sqrt{3}}{2}$ convient. Enfin, la troisième possibilité est $Z_3 = u_3 + v_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-3}{2}$. On en déduit aisément les solutions de l'équation initiale en se souvenant que $z = Z + 1$: $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ et $z_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-3}{2}$.

Problème 2 : homographies du plan complexe

I. Un cas particulier

1. L'application est évidemment définie sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. Essayons donc de déterminer sa réciproque, posons $Z = f(z) = \frac{iz-1}{z+1}$, alors $Zz+Z = iz-1$, soit $z(Z-i) = -1-Z$, ou encore $z = \frac{Z+1}{i-Z}$. Cette expression n'a un sens que si $Z \neq i$, et donne dans ce cas la valeur de l'unique antécédent par f de Z. L'application f est donc bijective de $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{i\}$.

2. Calculons donc $f(2) = \frac{2i-1}{3} = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$; et $f(1+i) = \frac{i-1-1}{2+i} = \frac{(i-2)(2-i)}{5} = \frac{-3+4i}{5} =$

$-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$. Pour les antécédents, on peut exploiter le calcul de la question précédente, on connait déjà la réciproque de f. L'unique antécédent de 2 sera donc égal à $\dfrac{3}{i-2} = \dfrac{3(i+2)}{-5} = -\dfrac{6}{5} - \dfrac{3}{5}i$. Celui de $1+i$ est donné par $\dfrac{2+i}{-1} = -2-i$.

3. On cherche à résoudre l'équation $f(z) = z$, soit $z(z+1) = iz-1$, ou encore $z^2+(1-i)z+1 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré de discriminant $\Delta = (1-i)^2-4 = -2i-4$. On cherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, ce qui donne les deux conditions $a^2-b^2 = -4$ et $ab = -2$. En ajoutant la condittion sur le module, on obtient la troisième équation $a^2+b^2 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. En soustrayant et additionnant les équations extrêmes, on a $2a^2 = 2\sqrt{5}-4$ et $2b^2 = 2\sqrt{5}+4$, ce qui permet de choisir en constatant que a et b sont de signe contraire $\delta = \sqrt{\sqrt{5}-2} - i\sqrt{\sqrt{5}+2}$. On trouve alors deux points invariants par f : $z_1 = \dfrac{i-1+\delta}{2}$ et $z_2 = \dfrac{i-1i\delta}{2}$ (qu'on peut écrire entièrement si on le souhaite, mais ça n'a pas grand intérêt).
4. Posons $z = a+ib$, on a alors $f(z) = \dfrac{ai-b-1}{a+ib+1} = \dfrac{(ai-b-1)(a+1-ib)}{(a+1)^2+b^2}$ $= \dfrac{a^2i+ai+ab-ab-b+ib^2-a-1+ib}{(a+1)^2+b^2} = \dfrac{-b-a-1+i(a^2+b^2+a+b)}{(a+1)^2+b^2}$. Pour avoir une image réelle, z doit donc vérifier $a^2+b^2+a+b = 0$, soit $\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = 0$. On reconnait l'équation d'un cercle de centre $A\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Pour que l'image de z soit imaginaire pure, on doit avoir $-b-a-1 = 0$, soit $b = -a-1$, donc z appartient à une droite du plan, d'équation $y = -x-1$.
5. Pour avoir $f(z) \in \mathbb{U}$, il suffit d'avoir $|iz-1| = |z+1|$. En posant $z = a+ib$ et en élevant tout au carré, on trouve la condition $|ia-b-1|^2 = |a+ib+1|^2$, soit $(-b-1)^2+a^2 = (a+1)^2+b^2$. On développe tout : $b^2+1+2b+a^2 = a^2+2a+1+b^2$, soit très simplement $a = b$. Les nombres complexes ayant une image de module 1 sont donc situés sur la première bissectrice des axes (on vérifie par exemple que c'est le cas pour $1+i$ dont on a calculé l'image plus haut : $\left|-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right| = \sqrt{\dfrac{9}{25}+\dfrac{16}{25}} = 1$).
6. On n'arrive pas à grand chose à partir de l'expression de $f(z)$. Mieux vaut repartir de la réciproque : en posant $Z = c+id$, $\dfrac{Z+1}{i-Z} = \dfrac{c+1+id}{-c+i(1-d)} = \dfrac{(c+1+id)(-c-i+id)}{c^2+(1-d)^2} =$ $\dfrac{-c^2-ic+icd-c-i+id-icd+d-d^2}{c^2+(1-d)^2} = \dfrac{-c^2-c+d-d^2+i(-c-1+d))}{c^2+(1-d)^2}$. Les images des nombres ayant une partie imaginaire strictement positive sont les Z ayant un antécédent dont la partie imaginaire est positive, donc vérifiant $-c-1+d > 0$, autrement dit $c+1 < d$. Il s'agit du demi-plan situé au-dessus de la droite d'équation $y = x+1$ dans le plan complexe.

II. Une étude plus générale

1. Prenons donc un $z \in \mathbb{U}$, qui peut s'écrire sous la forme $e^{i\alpha}$. On a alors $f(z) = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)} \in \mathbb{U}$.
2. Comme $a \notin \mathbb{U}$, on ne peut pas avoir $|\overline{a}| = 1$, donc $|\overline{a}e^{i\alpha}| \neq 1$. En particulier, $\overline{a}e^{i\alpha} \neq -1$, donc le dénominateur ne peut pas s'annuler si $z \in \mathbb{U}$. L'application est donc définie sur $\mathbb{U}$. Cherchons désormais à calculer $|f(z)| = \dfrac{|z+a|}{|\overline{a}z+1|} = \dfrac{|z+a|}{|\overline{a}z\overline{z}+\overline{z}|} \times |\overline{z}|$. Le nombre z étant de module 1, $|\overline{z}| = 1$ et $z\overline{z} = 1$ donc $|f(z)| = \dfrac{|z+a|}{\overline{a}+\overline{z}} = \dfrac{|z+a|}{|\overline{z+a}|} = 1$, donc $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. (a) Écrivons $\alpha = a+ib$ et $\beta = c+id$, on a donc $|\alpha+\beta|^2 = (a+c)^2+(b+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+$

$2(ac+bd)$. Or, $|\alpha|^2 = a^2+b^2$, $|\beta|^2 = c^2+d^2$ et $\overline{\alpha}\beta = (a-ib)(c+id) = ac+bd+i(ad-bc)$ a pour partie réelle $ac+bd$, ce qui donne bien la formule annoncée.

(b) Par hypothèse, on doit avoir $|f(e^{i\theta})| = 1$, c'est-à-dire $|ae^{i\theta}+b| = |ce^{i\theta}+d|$. En élevant au carré et en utilisant la question précédente, $|ae^{i\theta}|^2 + |b|^2 + 2\text{Re}\,(\overline{ae^{i\theta}}b) = |ce^{i\theta}|^2 + |d|^2 + 2\text{Re}\,(\overline{ce^{i\theta}}d)$, soit en effet $|a|^2 + |b|^2 + 2\text{Re}\,(\overline{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\text{Re}\,(\overline{c}de^{-i\theta})$.

(c) Écrivons le nombre β sous forme exponentielle $\beta = re^{i\mu}$. Pour $\theta = \mu$, on a $\beta e^{-i\theta} = re^{i\mu}e^{-i\mu} = r$, donc $2\text{Re}\,(\beta e^{-i\theta} = 2r$, et on doit donc avoir $\alpha + 2r = 0$. Si au contraire on prend $\theta = \mu + \pi$, on trouve $\beta e^{-i\theta} = re^{-i\pi} = -r$, donc on trouve la condition $\alpha - 2r = 0$. En additionnant ces deux équations, on trouve que $2\alpha = 0$ donc $\alpha = 0$, puis $2r = 0$, soit $|\beta| = 0$, ce qui implique $\beta = 0$.

Or, en faisant passer tout à gauche dans l'égalité de la question précédente, $|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 + 2\text{Re}\,((\overline{a}b - \overline{c}d)e^{-i\theta}) = 0$. En appliquant le calcul qu'on vient d'effectuer, on a $|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = 0$ (c'est ce qui joue le rôle de α) et $\overline{a}b - \overline{c}d = 0$ (c'est notre β).

(d) Si $a = 0$, la deuxième condition ci-dessus devient $\overline{c}d = 0$, donc on a soit $c = 0$ soit $d = 0$. Or on a supposé dès le départ que $ad - bc \neq 0$, donc on ne peut pas avoir à la fois $a = 0$ et $c = 0$. Il ne reste que la possibilité $d = 0$, dont on déduit $|b| = |c|$. On peut alors écrire que $\dfrac{b}{c} \in \mathbb{U}$, c'est-à-dire que $\dfrac{b}{c} = e^{i\theta}$. On en déduit que $f(z) = \dfrac{b}{cz} = \dfrac{e^{i\theta}}{z}$, qui est bien de la forme étudiée à la première question.

(e) Si $a \neq 0$, on peut écrire $b = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}}$ en exploitant notre deuxième condition. En remettant dans la première, $|a|^2 + \left|\dfrac{\overline{c}^2d^2}{\overline{a}^2}\right| = |c|^2 + |d|^2$, soit en multipliant tout par $|\overline{a}|^2$ (qui est égal à $|a|^2$), $|a|^4 + |c|^2|d|^2 = |a|^2|c|^2 + |a|^2|d|^2$. On fait tout passer de l'autre côté et on peut factoriser : $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$. Celà implique bien $|a|^2 = |c|^2$ (donc $|a| = |c|$ puisqu'on parle de réels positifs), ou $|a|^2 = |d|^2$.

(f) Supposons donc que $|a| = |c|$, soit $a = ce^{i\theta}$. On a alors $b = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}} = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{c}e^{-i\theta}} = de^{i\theta}$. Mais on a alors $ad - bc = cde^{i\theta} - cde^{i\theta} = 0$, ce qui est interdit ! On a donc $|a| = |d|$, soit $a = de^{i\theta}$, et $b = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}} = \dfrac{\overline{c}de^{i\theta}}{\overline{d}}$ donc $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{de^{i\theta}z + \frac{\overline{c}de^{i\theta}}{\overline{d}}}{cz+d} = e^{i\theta}\dfrac{z + \frac{\overline{c}}{\overline{d}}}{\frac{c}{d}z+1}$, qui est exactement de la forme étudiée à la deuxième question en posant $a = \dfrac{\overline{c}}{\overline{d}}$.