TD n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

26 septembre 2013

Exercice 1

1. Faisons un petit tableau :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$		$1-2x$	0	$2x-1$		$2x-1$	
$\lvert 4-x\rvert$		$4-x$		$4-x$	0	$x-4$	
$\lvert 2x-1\rvert+\lvert 4-x\rvert$		$5-3x$		$x+3$		$3x-5$	

Sur l'intervalle de gauche, on obtient comme solution de l'équation $x=0$, qui est valable. L'équation centrale donne $x=2$ qui est aussi valable. Enfin, celle de droite aboutit à $x=\frac{10}{3}$, qui elle n'appartient pas au bon intervalle. Finalement, $\mathcal{S}=\{0;2\}$.

2. En posant $X=x^2$, on se ramène à l'équation $X^2+X-20=0$, qui a pour discriminant $\Delta=1+80=81$, donc admet deux racines $X_1=\frac{-1+9}{2}=4$ et $X_2=\frac{-1-9}{2}=-5$. La valeur -5 est à éliminer pour x^2, donc on a nécessairement $x^2=4$, d'où $\mathcal{S}=\{-2;2\}$.

3. L'inéquation est définie lorsque $x+2$ et $3x-6$ sont tous deux strictement positifs, donc pour $x>3$. Elle revient alors à $\ln\frac{x+2}{2x-6}\leqslant\ln 2$, soit $\frac{x+2}{2x-6}\leqslant 2$, donc $\frac{-3x+14}{2x-6}\leqslant 0$. Comme $2x-6$ a déja été supposé positif, $\mathcal{S}=\left[\frac{14}{3};+\infty\right[$.

4. En faisant tout passer à gauche, on se ramène à $\frac{-5x-11}{x^3+2x^2-5x-6}\geqslant 0$. Le signe du numérateur est facile à obtenir, mais pour le dénominateur il faut commencer par le factoriser. On constate que -1 est racine du dénominateur : $(-1)^3+2(-1)^2-5(-1)-6=-1+2+5-6=0$. On peut donc écrire $x^3+2x^2-5x-6=(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$. Par identification des coefficients, on a $a=1$, $b=1$ et $c=-6$, donc $x^3+2x^2-5x-6=(x+1)(x^2+x-6)$. Le dernier facteur a pour discriminant $\Delta=1+24=25$ et admet deux racines $x_1=\frac{-1+5}{2}=2$ et $x_2=\frac{-1-5}{2}=-3$. On peut désormais faire un gros tableau de signes :

x		-3		$-\frac{11}{5}$		-1		2	
$-5x-11$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$
x^3+2x^2-5x-6	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
Q	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$

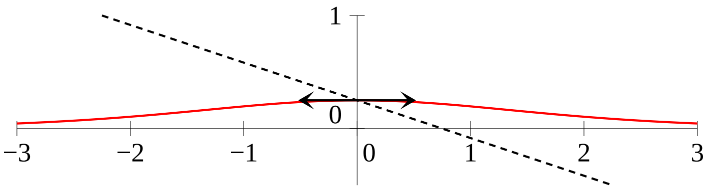
Conclusion : $\mathcal{S}=\left]-3;-\frac{11}{5}\right]\cup]-1;2[$.

Exercice 2

1. Le dénominateur de f ne s'annulant jamais (puisque $e^x + 1$ est toujours strictement positif), $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Comme $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} = f(x)$, la fonction f est paire.
3. Quand x tend vers $-\infty$, le numérateur de f tend vers 0 et son dénominateur vers 1, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La fonction étant paire, on aura aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (ce qu'on peut retrouver par un calcul direct, par exemple en développant le dénominateur et en factorisant tout par e^x).
4. Calculons donc : $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \dfrac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif, le signe du numérateur dépend uniquement de celui de $1 - e^x$, qui est positif quand $e^x \leqslant 1$, c'est-à-dire quand $x \leqslant 0$. D'où le tableau de variations suivant ($f(0) = \dfrac{1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{4}$) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

5. Puisque $e^{\ln 2} = 2$, on a $f(\ln 2) = \dfrac{2}{(1+2)^2} = \dfrac{2}{9}$, et $f'(\ln 2) = \dfrac{2(1-2)}{(1+2)^3} = -\dfrac{2}{27}$. L'équation de la tangente est donc $y = -\dfrac{2}{27}(x - \ln 2) + \dfrac{2}{9} = -\dfrac{2}{27}x + \dfrac{2}{9}\left(1 + \dfrac{\ln 2}{3}\right)$.
6. Le fait que $f'(x)$ soit négatif sur cet intervalle a déjà été vu. De plus, $f'(x) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3e^x(1-e^x) + (1+e^x)^3}{(1+e^x)^3} = \dfrac{3e^x - 3e^{2x} + 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}}{(1+e^x)^3} = \dfrac{1 + 6e^x + e^{3x}}{(1+e^x)^3} \geqslant 0$, d'où la deuxième inégalité demandée.
7. Posons $a(x) = f(x) + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}$. Comme $a'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{3} \geqslant 0$, la fonction a est croissante sur $[0; +\infty[$. Or, $a(0) = f(0) - \dfrac{1}{4} = 0$, donc la fonction a prend des valeurs positives sur $[0; +\infty[$, ce qui revient à ce qu'on voulait prouver.
8. Voici les courbes, avec la droite en pointillés :



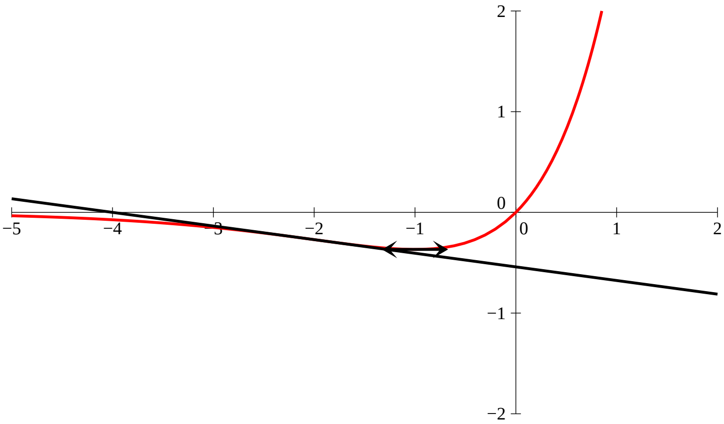
Problème

I. Étude de f et de sa réciproque.

1. La fonction f a pour dérivée $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. La fonction admet donc un minimum en -1, de valeur $f(-1) = -\dfrac{1}{e}$. Sans difficulté, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et en appliquant directement un résultat de croissance comparée, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
2. (a) La fonction f' est dérivable, de dérivée $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. Elle s'annule effectivement une seule fois, en $\alpha = -2$.

   (b) Puisque $f(-2) = -\dfrac{2}{e^2}$ et $f'(-2) = -\dfrac{1}{e^2}$, la tangente a pour équation $y = -\dfrac{1}{e^2}(x+2) - \dfrac{2}{e^2} = -\dfrac{1}{e^2}(x+4)$. Elle coupe l'axe des abscisses pour $x = -4$.

   (c) On cherche donc à étudier le signe de $f(x) + \dfrac{1}{e^2}(x+4) = xe^x + \dfrac{1}{e^2}(x+4)$. Cette expression a la même dérivée seconde que f, sa dérivée $(x+1)e^x + \dfrac{1}{e^2}$ est donc décroissante sur $]-\infty; -2]$ et croissante sur $[-2; +\infty[$. Comme elle vaut $-\dfrac{1}{e^2} + \dfrac{1}{e^2} = 0$ en -2, elle est donc toujours positive. L'expression $f(x) + \dfrac{1}{e^2}(x+4)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, elle s'annule également en $x = -2$ (puisque la tangente y coupe la courbe représentative de f), on en déduit que la tangente est au-dessus de la courbe sur $]-\infty; -2]$, et en-dessous sur $[-2; +\infty[$.
3. Voici une allure de courbe :



4. La fonction f étant continue et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$, elle y est bijective vers son intervalle image $\left[-\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$. Le théorème de la bijection donne directement le tableau de variations de g :

x	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$
f	-1 $\nearrow$	$+\infty$

5. En utilisant la formule de dérivation d'une réciproque, $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} = \dfrac{1}{(g(x)+1)e^{g(x)}}$. Or, par définition, la fonction g vérifie $g(x)e^{g(x)} = x$. On peut donc écrire, lorsque $x \neq 0$, $e^{g(x)} = \dfrac{x}{g(x)}$, et $g'(x) = \dfrac{g(x)}{x(g(x)+1)}$. En particulier, la fonction g est solution de l'équation différentielle $xy'(y+1) = y$.

6. En effet, cette équation s'écrit $e^{x\ln(2)} = x$, soit en multipliant chaque membre par $\ln(2)$, $\dfrac{x\ln(2)}{e^{x\ln(2)}} = \ln(2)$, donc $-x\ln(2)e^{-x\ln(2)} = -\ln(2)$. Autrement dit $f(-x\ln(2)) = -\ln(2)$, ce qui équivaut à $-x\ln(2) = g(-\ln(2))$, soit $x = -\dfrac{g(-\ln(2))}{\ln(2)}$.

7. On peut écrire l'équation sous la forme $e^{x\ln(x)} = 3$, soit $x\ln(x) = \ln(3)$. En posant $X = \ln(x)$, on se ramène à l'équation $f(X) = \ln(3)$, soit $X = g(\ln(3))$. On a donc $\ln(x) = e^{g(\ln(3))}$, soit $x = e^{g(\ln(3))}$.

II. Des fonctions auxiliaires.

1. La fonction h_a est évidemment dérivable, de dérivée $h_a'(x) = -e^{-x} + 2ax = e^{-x}(-1 + 2af(x))$, qui est du signe de $2af(x) - 1$. Elle s'annule lorsque $f(x) = \dfrac{1}{2a}$ (valeur atteinte une unique fois par la fonction f), autrement dit en $m_a = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$. Son image par la fonction h est $h_a(m_a) = e^{-g(\frac{1}{2a})} + a\left(g\left(\dfrac{1}{2a}\right)\right)^2 = e^{-m_a} + am_a^2$. Or, par définition, $m_a = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$ implique $f(m_a) = \dfrac{1}{2a}$, soit $m_a e^{m_a} = \dfrac{1}{2a}$, donc $e^{-m_a} = 2am_a$, et $h_a(m_a) = 2am_a + am_a^2 = am_a(m_a + 2)$.

2. Puisque $i(a) = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$, que $a \mapsto \dfrac{1}{2a}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que g est croissante sur son domaine de définition, i est une fonction décroissante. Par simple composition de limite, $\lim\limits_{a\to+\infty} i(a) = g(0) = 0$, et $\lim\limits_{a\to 0^+} i(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

3. Il suffit de constater que, si $a < b$, on aura $h_a(x) < h_b(x)$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $h_a(m_b) < h_b(m_b)$. Comme m_a est le minimum de la fonction h_a, on a également $h_a(m_a) \leqslant h_a(m_b)$, dont on déduit que $h_a(m_a) < h_b(m_b)$. La valeur du maximum est donc une fonction strictement croissante de la variable a. Reste à déterminer la limite quand a tend vers $+\infty$ de $am_a(m_a+2)$. On sait déjà que $\lim\limits_{a\to+\infty} m_a = 0$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} m_a + 2 = 2$. De plus, $am_a = \dfrac{1}{2}e^{-m_a}$, qui a pour limite $\dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} h_a(m_a) = 1$.