TD n°3 : révisions pour le DS1

PTSI B Lycée Eiffel

26 septembre 2013

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $|2x-1|+|4-x|=5$
2. $x^4+x^2-20=0$
3. $\ln(x+2)-\ln(2x-6)\leqslant \ln 2$
4. $\dfrac{-x^3-2x^2-5}{x^3+2x^2-5x-6}\geqslant -1$

Exercice 2

Dans tout cet exercice, on cherche à étudier la fonction f définie par l'équation $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$, et dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse $\ln 2$.
6. Démontrer que $\forall x\in[0,+\infty[$, $-\dfrac{1}{3}\leqslant f'(x)\leqslant 0$.
7. Montrer à l'aide de la question précédente que $\forall x\in[0,+\infty[$, $-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{4}\leqslant f(x)$.
8. Tracer dans un même repère la droite d'équation $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{4}$, et la courbe représentative de la fonction f.

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

I. Étude de f et de sa réciproque.

1. Étudier les variations et limites de la fonction f.
2. (a) Déterminer la dérivée seconde f'' de la fonction f et vérifier qu'elle s'annule en une unique valeur α.

   (b) Donner l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α. En quel point (T) coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

   (c) Étudier la position relative de (T) et de $\mathcal{C}_f$ (on pourra dériver deux fois la différence des deux équations si besoin).
3. Tracer dans un même repère (T) et $\mathcal{C}_f$.
4. Montrer que la fonction f est bijective de $[-1; +\infty[$ vers un intervalle à préciser. On note g la réciproque de la fonction f sur cet intervalle. Donner le tableau de variations complet de la fonction g.
5. Exprimer la dérivée g' de la fonction g en fonction de x et de $g(x)$, sans utiliser d'exponentielle. En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction g.
6. Montrer que l'équation $2^x = x$ admet pour solution $x = -\dfrac{g(-\ln(2))}{\ln(2)}$ (qu'on ne cherchera bien sûr pas à expliciter plus).
7. Exprimer de même une solution de l'équation $x^x = 3$ en faisant intervenir la valeur $g(\ln(3))$.

II. Des fonctions auxiliaires.

On considère désormais, pour tout réel $a > 0$, la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x) = e^{-x} + ax^2$.

1. Établir le tableau de variations de la fonction h_a (en exploitant les résultats de la première partie). On montrera en particulier que h_a admet un minimum en un point m_a que l'on exprimera en fonction de a et à l'aide de la fonction g. Montrer que $h_a(m_a) = am_a(m_a + 2)$.
2. On note enfin i la fonction $i : a \mapsto m_a$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Étudier les variations de la fonction i ainsi que ses limites.
3. Montrer que la valeur du maximum de h_a est une fonction croissante du paramètre a, et déterminer sa limite lorsque a tend vers $+\infty$.