TD n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

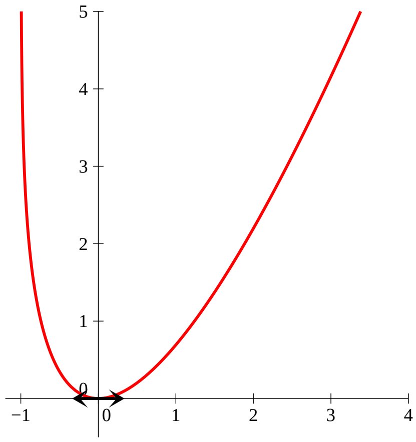
5 septembre 2013

Exercice 1

- La fonction f est définie, continue et dérivable sur l'intervalle $]-1;+\infty[$. Elle a pour limite $+\infty$ en -1 (produit d'un terme tendant vers -1 par un terme tendant vers $-\infty$) et $+\infty$ en $+\infty$ (pas de forme indéterminée). De plus, sa dérivée est donnée par $f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$. Étudier le signe d'une somme de ce genre n'est a priori pas du tout évident, mais on est ici sauvés par une intéressante coïncidence : le terme $\ln(x+1)$ change de signe pour $x = 0$ (c'est négatif avant, positif après) et $\dfrac{x}{x+1}$ également. Du coup, quand $x < 0$, on a une somme de deux termes négatifs, et la dérivée est donc négative sur $]-1;0]$. Par contre, tout est positif si $x > 0$, et la dérivée est donc positive sur $[0;+\infty[$. Comme $f(0) = 0$, on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

  Ne reste plus qu'à tracer une jolie courbe :

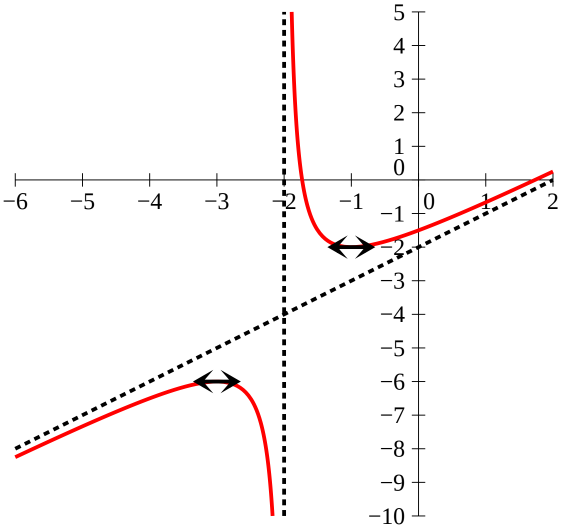


- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. Comme le numérateur tend vers 1 en -2, on obtient sans difficulté $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x) = +\infty$, d'où la présence d'une asymptote verticale. Du côté des infinis, on peut faire un calcul commun, en utilisant la règle du quotient des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$ (et symétriquement en $-\infty$). Les plus courageux réussiront à diagnostiquer la présence d'une asymptote oblique : $\dfrac{x^2-3}{x+2} = \dfrac{x^2-4+1}{x+2} = \dfrac{(x-2)(x+2)+1}{x+2} = x-2+\dfrac{1}{x+2}$. Le terme $\dfrac{1}{x+2}$ ayant une limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$, on peut conclure à la présence d'une asymptote oblique d'équation $y = x-2$

des deux côtés.
La fonction est évidemment dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $g'(x) = \dfrac{2x(x+2)-(x^2-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$. Elle est du signe de x^2+4x+3, trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 16-12 = 4$, et qui admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$, et $x_2 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$. Pour compléter le tableau de variations, on calcule les valeurs de $f(-3) = -6$ et $f(-1) = -2$. On peut aussi constater que $f(x) = 0$ pour $x = \pm\sqrt{3}$, et que $f(0) = -\dfrac{3}{2}$ si on le souhaite.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

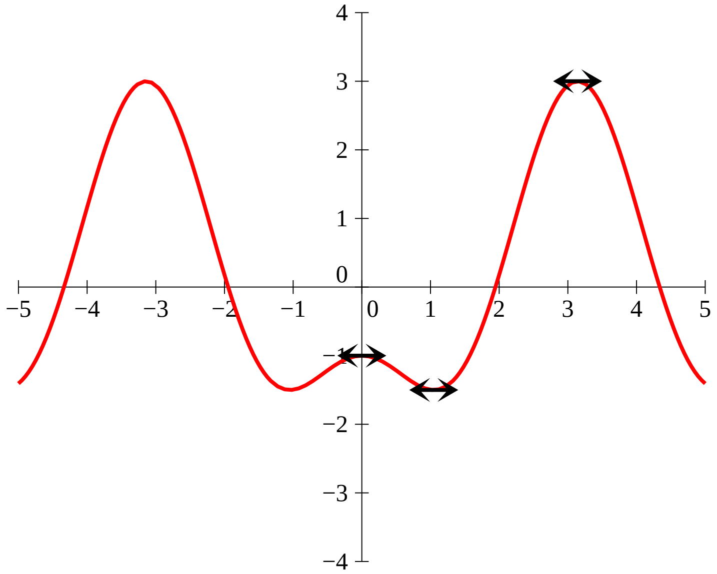
On indique bien évidemment les asymptotes sur la courbe :



- La fonction h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme pour toute fonction trigonométrique, on cherche à voir si la fonction n'est pas périodique. Elle l'est, de période 2π, puisque $h(x+2\pi) = \cos(2x+4\pi) - 2\cos(x+2\pi) = \cos(2x) - 2\cos(x)$. Elle est de plus paire, puisque la fonction cos est elle-même paire. On peut donc se contenter d'étudier h sur l'intervalle $[0;\pi]$, et de compléter la courbe ensuite. Sa dérivée est donnée par $h'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin(x) = 2(\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)) = 2\sin(x)(1-2\cos(x))$. Sur $[0;\pi]$, le sinus est toujours positif, reste à déterminer le signe de $1-2\cos(x)$. Cette expression est positive lorsque $\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui, sur l'intervalle $[0\pi]$, se produit sur $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$. La dérivée change donc de signe en $\dfrac{\pi}{3}$, qui est un minimum local de la fonction de valeur $h\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{3}{2}$. On peut également calculer $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 1-(-2) = 3$ pour compléter le tableau de variations de h :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
h	0	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

En complétant par symétrie par rapport à (Oy) (il y a donc un maximum local en 0), et par périodicité, on obtient une courbe ressemblant à ceci :



Exercice 2

1. Au vu de l'énoncé, $f_1(x) = \sqrt{x+1}e^{-x}$, la fonction est dérivable sur $]-1;+\infty[$, de dérivée $f_1'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{-x} - \sqrt{x+1}e^{-x} = \dfrac{1-2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}e^{-x} = \dfrac{-1-2x}{2\sqrt{x+1}}e^{-x}$. Cette dérivée est du signe de $-2x-1$, et s'annule donc pour $x = -\dfrac{1}{2}$, valeur pour laquelle la fonction admet un maximum égal à $\sqrt{\dfrac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{e}{2}}$. Par ailleurs, $f_1(-1) = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$ (il y a une forme indéterminée, mais l'exponentielle l'emporte sur la racine carrée). D'où le tableau de variations suivant :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f_1	0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\searrow$	0

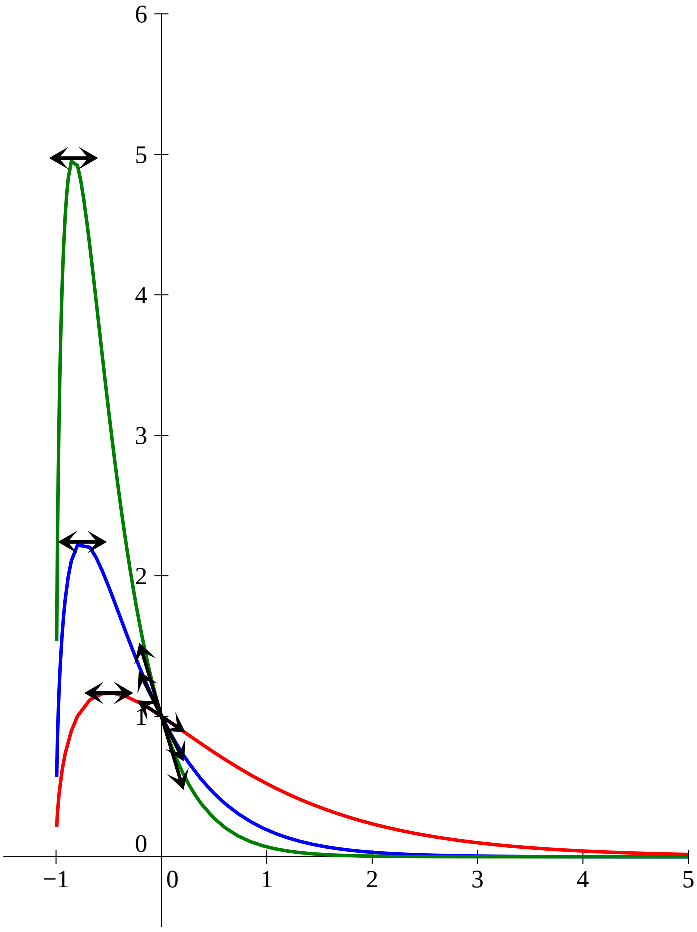
2. C'est le même calcul que ci-dessus : $f_n'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{-nx} - n\sqrt{n+1}e^{-nx} = \dfrac{1-2n(x+1)}{2\sqrt{n+1}}e^{-nx}$. Cette dérivée est du signe de $1-2n(x+1)$, équation de droite s'annulant quand $x+1 = \dfrac{1}{2n}$, soit $x = \dfrac{1}{2n} - 1$. La fonction y admet bien un maximum (la dérivée est positive avant et négative après), de valeur $f_n\left(\dfrac{1}{2n} - 1\right) = \sqrt{\dfrac{1}{2n}}e^{-\frac{1}{2}+n} = \dfrac{e^n}{\sqrt{2ne}}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{2n} - 1$ a pour limite -1, et la valeur du maximum tend vers $+\infty$ (encore une fois, l'exponentielle l'emporte). Autrement dit, le maximum se situe de plus en plus près de -1, et de plus en plus haut.

3. En -1, le numérateur de la dérivée a pour limite e^n, et le dénominateur tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to-1} f_n'(x) = +\infty$. Les courbes $\mathcal{C}_n$ auront toutes une tangente verticale en -1.

4. Toutes les courbes passent bien sûr par le point $(-1;0)$, mais aussi par le point $(0;1)$. De plus, par croissance comparée, toutes les fonctions ont une limite nulle en $+\infty$, donc toutes les

courbes admettent l'axe des abscisses pour asymptote horizontale.

5. On a déjà vu à la question précédente qu'on a toujours $f_n(0) = 1$. De plus, $f_n'(0) = \frac{1-2n}{2} = \frac{1}{2} - n$. La tangente en 0 a donc pour équation $y = \left(\frac{1}{2} - n\right) x + 1$ (la pente de la tangente est de plus en plus négative).
6. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sqrt{n+1}e^{-(n+1)x} - \sqrt{x+1}e^{-nx} = \sqrt{x+1}e^{-nx}(e^{-x} - 1)$. Cette différence est du signe de $e^{-x} - 1$, qui s'annule en 0, est positive entre -1 et 0 et négative ensuite. La courbe $\mathcal{C}_{n+1}$ est donc au-dessus de $\mathcal{C}_n$ sur $[-1; 0]$ et en-dessous sur $[0; +\infty[$.
7. Voici les courbes, $\mathcal{C}_\infty$ en rouge, $\mathcal{C}_2$ en bleu et $\mathcal{C}_3$ en vert, ainsi que les tangentes en 0 :



Exercice 3

1. La fonction f est 2π-périodique et paire, puisque cos l'est. On peut donc l'étudier sur $[0; \pi]$.
2. C'est une équation très difficile à résoudre si on nje dispose pas de quelques formules trigonométriques. Ici, la plus utile est celle qui permet d'affirmer que $\cos(x) + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(x)$. On peut la vérifier à la main à l'aide des formules d'addition : $\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) = \cos(2x)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) = \cos(x)(\cos(2x) - 2(1 - \cos^2(x))$. Comme par ailleurs $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, on peut écrire $\cos(x) + \cos(3x) = \cos(x)(2\cos(2x) - 1)$, puis $\cos(x) + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(x)$. L'équation devient alors $\cos(2x)(1 + 2\cos x) = 0$. On a donc $2x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$, soit $x \equiv \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$, $x \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. Si on se restreint à l'intervalle d'étude, f s'annule donc en $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos(2x)$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$		$-$	0	$+$	1
$2\cos x + 1$	3	$+$		$+$	1	$+$	0	$-$		$-$	-1
$f(x)$	3	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	-1

3. C'est un calcul assez facile : $f'(x) = -\sin(x) - 2\sin(2x) - 3\sin(3x) = -\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x) - 3(3\sin(x) - 4\sin^3(x)) = -\sin(x)(1 + 4\cos(x) + 9 - 12(1 - \cos^2(x))) = -\sin(x)(12\cos^2(x) + 4\cos(x) - 2)$. Pour en étudier le signe, il faut chercher le signe du trinome $12X^2 + 4X - 2 = 2(6X^2 + 2X - 1)$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 24 = 28$, et donc pour racines $X_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{28}}{12} = \dfrac{-1 + \sqrt{7}}{6}$ et $X_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{7}}{6}$. Ces deux valeurs étant comprises entre -1 et 1, ce sont les cosinus de deux angles θ_1 et θ_2 appartenant à $[0; \pi]$. Au vu du tableau de signes de f (ou d'une calcul de valeur approchée des deux cosinus), $\theta_1 \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et $\theta_2 \in \left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ (mais on sera bien incapables de dire mieux !). Le facteur $-\sin x$ étant toujours négatif sur $[0, \pi]$, f' sera positive entre θ_1 et θ_2 et négative ailleurs. On a donc un tableau de variations qui ressemble à ceci :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		θ_1		$\frac{2\pi}{3}$		θ_2		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$f(x)$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(\theta_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\theta_2)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

4. La courbe ressemble à ceci (on peut ajouter à l'étude que, pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, f prend la valeur -1 et f' la valeur 2) :