TD n°10 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

15 mai 2014

Exercice 1

1. (a) On calcule donc $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 5 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -16 \\ -4 & -4 & -8 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix}$, puis $A(A-2I)^2 = 0$ (calcul palpitant). Si la matrice A était inversible, on pourrait multiplier cette égalité à gauche par A^{-1} pour trouver $(A-2I)^2 = 0$, ce qui est faux. La matrice A n'est donc pas inversible, et son application linéaire associée f n'est pas bijective.

   (b) Résolvons donc le magnifique système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 6x & + & 10y & + & 11z & = & 0 \\ 2x & + & 6y & + & 5z & = & 0 \\ -4x & - & 8y & - & 10z & = & 0 \end{array} \right.$. Les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L2$ permettent de se ramener à $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & 8y & - & 4z & = & 0 \\ 2x & + & 6y & + & 5z & = & 0 \\ & & 4y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$. Les deux équations extrêmes donc équivalentes, elles donnent toutes les deux $z = -2y$. En reportant dans la deuxième équation, on trouve alors $2x - 4y = 0$, soit $x = 2y$. Autrement dit, $\ker(f) = \text{Vect}((2,1,-2))$, ce qui ne surprendra pas ceux qui ont déjà lu l'énoncé de la question suivante. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 1$. Pour le deuxième noyau, on résout un deuxième systèmes (en retranchant simplement $(2x, 2y, 2z)$ aux membres de gauche) : $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 10y & + & 11z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = & 0 \\ -4x & - & 8y & - & 10z & = & 0 \end{array} \right.$. On effectue les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ et $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$ pour trouver $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ -4x & - & 8y & - & 10z & = & 0 \end{array} \right.$. On a donc $z = -2y$, puis $x = 3y$, soit $\ker(f - 2\,\text{id}) = \text{Vect}((3,1,-2))$, qui est aussi de dimension 1.

2. (a) Il suffit de montrer que la famille est libre. Supposons $a(2,1,-2) + b(3,1,-2) + c(-2,0,1) = 0$. La deuxième coordonnée donne imadiatement $b = -a$, la troisième impose alors $c = 0$, et la première $-a = 0$, donc les trois coefficients sont nécessairement nuls. La famille est donc une famille de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, c'est une base.

   (b) N'utilisons surtout pas de matrice de passage, ce sera fait un peu plus loin dans l'énoncé. déjà, on sait que $f(2,1,-2) = 0$, et $f(3,1,-2) = 2(3,1,-2)$ vu les calculs de noyaux effectués auparavant. Reste à calculer $f(-2,0,1) = (-1,1,0)$ et à l'exprimer à l'aide des vecteurs de notre base. Si on est observateur, on se rend compte que $(-1,1,0) = 2(-2,0,1) + (3,1,-2)$, et si on ne l'est pas, on résout le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2a & + & 3b & - & 2c & = & -1 \\ a & + & b & & & = & 1 \\ -2a & - & 2b & + & c & = & 0 \end{array} \right.$. La deuxième équation donne $a = 1 - b$, la somme des deux extrêmes $b - c = -1$, soit $c = b + 1$. En reportant dans la première équation, $2 - 2b + 3b - 2b - 2 = -1$, soit $b = 1$, dont on déduit $a = 0$ et $c = 2$. La matrice T est donc égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. (a) On a donc $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui permet de calculer rapidement $N^2 = 0$. Les matrices D et N commutent (on constate aisément que $DN = ND = 2D$), on peut donc appliquer la formule du binôme pour obtenir $T^n = (N + D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nD^{n-1}N$.

   (b) Comme ci-dessus, on aura $D^{n-1}N = 2^{n-1}N$ puis $T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

   (c) Il suffit de prendre pour P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v, w), soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Passons par la résolution de système pour déterminer son inverse : $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = a \\ x + y = b \\ -2x - 2y + z = c \end{cases}$. On va effectuer la même substitution qu'à la question 2.b : $x = b - y$ et $y - z = a + c$, donc $z = y - c - a$. On reporte dans la première équation : $2b - 2y + 3y - 2y + 2c + 2a = a$, soit $y = a + 2b + 2c$, puis $x = -a - b - 2c$ et $z = 2b + c$. Autrement dit, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (d) C'est la récurrence triviale habituelle : le rang 1 découle de la question précédente, et si la propriété est vraie au rang n, alors $A^{n+1} = A^n \times A = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$.

   (e) On calcule donc $PT^n = \begin{pmatrix} 0 & 3.2^n & (3n-4).2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n.2^{n-1} \\ 0 & -2^{n+1} & (1-n).2^n \end{pmatrix}$, puis
   $A^n = \begin{pmatrix} 3.2^n & (3n+2).2^n & (3n+8).2^{n-1} \\ 2^n & (n+2).2^n & (n+4).2^{n-1} \\ -2^{n+1} & -(n+1)2^{n+1} & -(n+3)2^n \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. (a) Il y a $\binom{2n}{n}$ tirages possibles au total (l'ordre n'a aucune importance ici), dont un seul donnant toutes les boules numéro 0, donc la probabilité demandée vaut $\frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{n!^2}{(2n)!}$.

   (b) Si on impose que la boule numéro i soit tirée, il reste à choisir $n-1$ boules parmi les $2n-1$ restantes, donc la probabilité de tirer le numéro i vaut $\frac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} \times \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ (plutôt logique puisqu'on tire la moitié des boules de l'urne).

   (c) Si $n \leqslant 3$, cette probabilité vaut bien sûr 1. Dans le cas contraire, il y a $n+3$ boules dont le numéro n'atteint pas 4, donc la probabilité vaut $\frac{\binom{n+3}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n+3)!}{6n!} \times \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{n!(n+3)!}{6(2n)!}$.
   Pour $n = 6$, on obtient $\frac{6! \times 9!}{6 \times 12!} = \frac{6!}{6 \times 10 \times 11 \times 12} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{10 \times 11 \times 12} = \frac{1}{11}$.

2. (a) La variable X_i est la variable indicatrice de l'événement « la boule i a été tirée », elle prend donc au vu de la question 1.b les valeurs 0 et 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. En particulier, $E(X_i) = \frac{1}{2}$, et $E(X_i^2) = \frac{1}{2}$ (le calcul est le même !), donc $V(X_i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

(b) La variable X_iX_j est aussi une variable indicatrice (quand on multiplie des 0 et des 1, on ne peut pasobtenir autre chose que des 0 et des 1), et $X_iX_j = 1$ est réalisé quand $X_i = X_j = 1$, c'est-à-dire quand les deux boules i et j ont été tirées. Par un calcul similaire à celui de la question 1.b, $P(X_iX_j = 1) = \dfrac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{(2n-2)!}{(n-2)!n!} \times \dfrac{n!^2}{(2n)!} = \dfrac{n(n-1)}{(2n(2n-1)} = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$ (cette valeur est également celle de l'espérance de X_iX_j). Comme $P(X_i = 1) \times P(X_j = 1) = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$, les deux évènements ne sont pas indépendants.

3. (a) La variable iX_i vaut i si la boule numéro i est tirée, 0 sinon. En faisant la somme de ces variables, on obtient donc la somme des numéros tirés (les boules 0 n'ayant évidemment aucune influence sur cette somme).

(b) Par linéarité, $E(S) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} iE(X_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{i}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$.

(c) On veut avoir $\dfrac{n(n+1)}{4} \geqslant 30$, soit $n(n+1) \geqslant 120$. Les plus courageaux iront résoudre l'inéquation du second degré, les autres constateront que $n(n+1)$ est croissant sur $\mathbb{N}$, que $10 \times 11 < 120$ mais $11 \times 12 > 120$. Il faut donc avoir $n \geqslant 11$.

4. (a) Comme il y a n boules portant le numéro 0 et n ne le portant pas, le nombre de tirages vérifiant $Z = k$ est de $\dbinom{n}{k} \times \dbinom{n}{n-k}$ (k boules choisies dans le premier lot, $n-k$ dans le deuxième), ou encore $\dbinom{n}{k}^2$ en utilisant la symétrie des coefficients binômiaux. On a donc $P(Z = k) = \dfrac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$. Comme Z prend ses valeurs entre 0 et n, on aura $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} P(Z = k) = 1$, ce qui donne bien (en faisant passer le dénominateur constant à droite) $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

(b) Si $n = 2$, on a $\dbinom{2n}{n} = \dbinom{4}{2} = 6$; et $\dbinom{2}{0} = \dbinom{2}{2} = 1$ et $\dbinom{2}{1} = 2$, d'où $P(Z = 0) = P(Z = 2) = \dfrac{1}{6}$ et $P(Z = 1) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. On en déduit $E(Z) = 1$ (la loi est symétrique), puis $E(Z^2) = \dfrac{4}{6} + \dfrac{4}{6} = \dfrac{4}{3}$, donc, via König-Huygens, $V(Z) = \dfrac{4}{3} - 1^2 = \dfrac{1}{3}$.

(c) On a manifestement $X + Z = n$, donc $X = n - Z$. Or, Z et X suivent la même loi (même raisonnement pour calculer la loi de X que pour celle de Z), donc ont la même espérance. Par linéarité, on obtient donc $2E(X) = n$, soit $E(X) = E(Z) = \dfrac{n}{2}$.

(d) Par ailleurs, $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} X_i$, donc $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$.

(e) En revenant à la définition, $E(Z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} i\frac{\binom{n}{i}^2}{\binom{2n}{n}}$. On peut faire démarrer la somme à $i = 0$ (ça ne change rien) et faire passer la constante du dénominateur de l'autre côté pour obtenir, en utlisant la valeur de $E(Z)$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i\binom{n}{i}^2 = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$.

Exercice 3

I. Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

1. L'équation $f(x)=0$ a pour discriminant $\Delta = q^2+4pq>0$ (les réels p et q sont évidemment positifs, ce sont des probabilités !), donc l'équation admet effectivement deux racines, on peut toujours noter r_1 la plus petite et r_2 la plus grande. Comme on doit alors avoir $(x-r_1)(x-r_2)=x^2-qx-qp$, on a $x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2 = x^2-qx-qp$, d'où par identification $r_1+r_2=q$ et $r_1r_2=-qp$.
2. Calculons donc : $f(1)=1-q-pq=p-pq=p(1-q)=p^2$; $f(-1)=1+q-qp=1+q(1-p)=1+q^2$; et $f(0)=-pq$.
3. Comme $f(0)<0$ tandis que $f(1)>0$ et $f(-1)>0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que f s'annule sur $]-1;0[$ et sur $]0;1[$. Comme on sait par ailleurs qu'elle s'annule exactement deux fois en r_1 et en r_2, on a donc $-1<r_1<0$ et $0<r_2<1$. En découle que $|r_1|<1$ et $|r_2|<1$. Pour prouver que $|r_1|<|r_2|$, il suffit de constater que ces deux nombres sont de signes opposés mais que leur somme est strictement positive (elle vaut q, on l'a calculée juste au-dessus).

II. Équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. L'évènement A_1 signifie qu'on tire deux Piles aux deux premiers lancers, donc $a_1=p^2$. L'évènements A_2 est réalisé si et seulement si on commence avec un Face, puis on poursuit avec deux Piles (si on avait un Pile au premier tirage, la première succession de deux Piles apparaitrait avant les tirages 2 et 3), donc $a_2=qp^2$. Enfin, pour que A_3 soit vérifié, on peut avoir les successions PFPP et FFPP sur les quatre premiers tirages (Face au deuxième lancer imposé comme ci-dessus, et peu importe ce qui se passe au premier), ce qui donne $a_3=a_2=qp^2$.
2. En effet, si on veut que A_{n+2} soit réalisé (pour $n\geqslant 1$), il ne faut pas commencer par deux Piles. Si on commence avec un Face, on peut oublier ce premier tirage et on attend que le premier PP apparaisse sur les $n+1$ tirages restants, ce qui a pour probabilité a_{n+1}. Si on commence avec un Pile, il faut donc un Face au deuxième tirage, et on peut alors oublier ces deux tirages et attendre le premier PP sur les n tirages restants. Ces deux situations étant incompatibles, on aura $a_{n+2}=P(F_1)\times a_{n+1}+P(P_1F_2)\times a_n = qa_{n+1}+pqa_n$. Si $n=0$, on constate tout simplement que $qa_1+pqa_0=qp^2=a_2$, la formule est donc toujours valable. La relation demandée en découle immédiatement.
3. La suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, et on a déjà vu plus haut que son équation caractéristique admettait r_1 et r_2 pour racines. On a donc $a_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n$, avec $a_0=\alpha+\beta=0$ et $a_1=\alpha r_1+\beta r_2=p^2$, donc $\beta=-\alpha$ et $p^2=\alpha(r_1-r_2)$. Cela donne bien $\alpha=\dfrac{p^2}{r_1-r_2}$ et $\beta=\dfrac{p^2}{r_2-r_1}$, et la formule demandée. On peut aussi prouver la formule par récurrence...
4. On a vu plus haut que $|r_1|<|r_2|$, donc $r_1^n=o(r_2^n)$, et $a_n\sim\dfrac{p_2r_2^n}{r_2-r_1}$ (notez au passage que cette probabilité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui n'a rien de surprenant).

III. Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

1. Calculons donc $AX_n=\begin{pmatrix}(r_1+r_2)a_{n+1}-r_1r_2a_n\\ a_{n+1}\end{pmatrix}$. Mais on a vu plus haut que $(r_1+r_2)=q$ et $r_1r_2=-pq$, donc le premier terme de AX_n vaut $qa_{n+1}+pqa_n$, qui vaut a_{n+2}. Finalement, $AX_n=\begin{pmatrix}a_{n+2}\\ a_{n+1}\end{pmatrix}=X_{n+1}$.

2. Constatons que $A - r_1 I = \begin{pmatrix} r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$, et que sur cette matrice, $L_1 - r_2 L_2$ donne la ligne nulle, ce qui empêche d'inverser la matrice. De même, $A - r_2 I = \begin{pmatrix} r_1 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_2 \end{pmatrix}$, et cette fois-ci c'est $L_1 - r_1 L_2$ qui s'annule, avec la même conclusion.
3. Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice P : la combinaison $L_2 \leftarrow L_1 - r_1 L_2$ transforme la matrice P en $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 0 & r_2 - r_1 \end{pmatrix}$, puis la combinaison $L_1 \leftarrow (r_1 - r_2) L_1 + r_2 L_2$ donne la matrice diagonale $\begin{pmatrix} r_1(r_1 - r_2) & 0 \\ 0 & r_2 - r_1 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à diviser les lignes respectivement par $r_1(r_1 - r_2)$ et $r_2 - r_1$ pour obtenir l'identité (ça ne pose aucun problème, on sait que tous ces nombres sont non nuls). Les opérations effectuées en parallèle sur l'identité donnent $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} r_1 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$, et enfin $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1 - r_2} & \frac{r_2}{r_2 - r_1} \\ \frac{1}{r_2 - r_1} & \frac{r_1}{r_1 - r_2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix}$.
4. On calcule donc $AP = \begin{pmatrix} r_1^2 & r_2^2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1}AP = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1^2 - r_1 r_2 & 0 \\ 0 & r_1 r_2 - r_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$.
5. Faisons donc, puisqu'on nous le propose si gentiment, une jolie récurrence. Pour $n = 0$, c'est clair : $PD^0 P^{-1} X_0 = PP^{-1} X_0 = X_0$. Et si on suppose la relation vérifiée au rang n, alors $X_{n+1} = AX_n = APD^n P^{-1} X_0$, avec $A = PDP^{-1}$ (il suffit de multiplier à gauche par P et à droite par P^{-1} la relation de la question précédente). Donc $X_{n+1} = PDP^{-1} PD^n P^{-1} X_0 = PDD^n P^{-1} X_0 = PD^{n+1} P^{-1} X_0$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence.
6. Encore un peu de calcul : $D^n = \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix}$, puis $PD^n = \begin{pmatrix} r_1^{n+1} & r_2^{n+1} \\ r_1^n & r_2^n \end{pmatrix}$, puis $PD^n P^{-1} = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1^{n+1} - r_2^{n+1} & r_2^{n+1} r_1 - r_2 r_1^{n+1} \\ r_1^n - r_2^n & r_1 r_2^n - r_2 r_1^n \end{pmatrix}$. Comme $X_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient finalement $X_n = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} p^2(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) \\ p^2(r_1^n - r_2^n) \end{pmatrix}$. On retrouve bien pour a_n (et accessoirement pour a_{n+1}) la formule trouvée par l'autre méthode.