TD n°10 : Révisions pour le DS8

PTSI B Lycée Eiffel

15 mai 2014

Exercice 1

On considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer $A(A-2I)^2$, et en déduire que f ne peut pas être un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer une base de $\ker(f)$ et $\ker(f - 2\,\mathrm{id})$, ainsi que leurs dimensions.
2. On considère les vecteurs $u = (2, 1, -2)$, $v = (3, 1, -2)$ et $w = (-2, 0, 1)$.
   (a) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice T de f dans cette base.
3. (a) On pose $T = D + N$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer N^2 puis utiliser la formule du binôme pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $T^n = D^n + nD^{n-1}N$.
   (b) Donner explicitement, pour tout entier naturel n non nul, la matrice T^n en fonction de n
   (c) Proposer une matrice P telle que $A = PTP^{-1}$ puis déterminer P^{-1}.
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $A^n = PT^nP^{-1}$.
   (e) Déterminer explicitement A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 2

Une urne contient $2n$ boules, parmi lesquelles n sont numérotées de 1 à n, et les n restantes portent le numéro 0. On tire simultanément dans cette urne n boules.

1. Quelques calculs de probabilités.
   (a) Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules portant le numéro 0 ?
   (b) Soit $i \in \{1; \dots; n\}$. Déterminer la probabilité que la boule numéro i fasse partie des n boules tirées (simplifier le résultat).
   (c) Déterminer la probabilité qu'aucun numéro supérieur ou égal à 4 ne soit tiré. Calculer explicitement cette probabilité lorsque $n = 6$.
2. Pour tout entier $i \in \{1; \dots; n\}$, on note désormais X_i la variable valant 1 si la boule numéro i a été tirée, 0 sinon.
   (a) Quelle est la loi de la variable X_i ? Préciser l'espérance et la variance de X_i.
   (b) Soient i et j deux entiers distincts compris entre 1 et n. Déterminer la loi et l'espérance de la variable X_iX_j. Les évènements $X_i = 1$ et $X_j = 1$ sont-ils indépendants ?
3. On définit désormais une nouvelle variable aléatoire $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} iX_i$.
   (a) Que représente la variable S ?

(b) Calculer l'espérance de S.

(c) Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle la somme des numéros obtenus devient en moyenne supérieure ou égale à 30 ?

4. On définit deux nouvelles variables aléatoires : Z est égale au nombre de boules tirées portant le numéro 0, et X le nombre de boules tirées ne portant pas le numéro 0.

(a) Déterminer la loi de Z, en déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

(b) Déterminer l'espérance et la variance de Z dans le cas particulier où $n = 2$.

(c) Quel lien y a-t-il entre X et Z ? En déduire les valeurs des espérances de X et de Z.

(d) Retrouver l'espérance de X en exprimant X à l'aide des variables X_i.

(e) Déduire de la valeur de $E(Z)$ une expression simple pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k}^2$.

Exercice 3

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement « deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n+1$ ». On définit alors la suite (a_n) des probabilités des événements A_n en convenant que $a_0 = 0$.

I. Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

On considère la fonction polynomiale f définie par $f(x) = x^2 - qx - pq$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$. Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 \times r_2$ en fonction de p et q.
2. Calculer $f(1)$, $f(-1)$ et $f(0)$.
3. En déduire l'encadrement suivant : $|r_1| < |r_2| < 1$.

II. Équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.
2. En séparant l'événement A_n en deux cas distincts selon les résultats obtenus lors des premiers lancers, prouver que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+2} - qa_{n+1} - pqa_n = 0$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^n - r_1^n)$.
4. Donner un équivalent simple de a_n lorsque n tend vers plus l'infini.

III. Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

On définit désormais les matrices $A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ainsi que, pour tout entier naturel n, la matrice-colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que les matrices $A - r_1 I$ et $A - r_2 I$ ne sont pas inversibles.
3. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
4. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
5. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.
6. Retrouver ainsi l'expression de a_n en fonction de r_1, r_2, p et n.