

TD n°1 : fonctions

PTSI B Lycée Eiffel

5 septembre 2013

Exercice 1

Étudier le plus complètement possible les fonctions suivantes :

- $f(x) = x \ln(x + 1)$
- $g(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$
- $h(x) = \cos(2x) - 2 \cos(x)$

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit sur $[1; +\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \sqrt{x+1}e^{-nx}$, et on note \mathcal{C}_n sa courbe représentative.

1. Étudier la fonction f_1 , et dresser son tableau de variations.
2. Calculer la dérivée f'_n de la fonction f_n . En déduire que la fonction f_n admet un maximum global sur son domaine de définition, dont on donnera la valeur. Quelles sont les limites de l'abscisse et de la valeur du maximum lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1} f'_n(x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe \mathcal{C}_n ?
4. Montrer que toutes les courbes \mathcal{C}_n admettent deux points communs que l'on précisera, ainsi qu'une asymptote horizontale commune.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_n en son point d'abscisse 0.
6. Déterminer la position relative de \mathcal{C}_n et de \mathcal{C}_{n+1} .
7. Tracer dans un même repère une allure des courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 .

Exercice 3

On s'intéresse à la fonction trigonométrique définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \cos x + \cos(2x) + \cos(3x)$$

1. Déterminer un intervalle d'étude intelligent pour f .
2. Résoudre l'équation $\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$, en déduire le signe de f sur l'intervalle d'étude.
3. Montrer que $f'(x) = -\sin x(12 \cos^2 x + 4 \cos x - 2)$, en étudier le signe et en déduire les variations de f (on ne cherchera pas à calculer de valeur exacte des minima et maxima locaux).
4. Tracer une allure de la courbe de f (vous pouvez calculer quelques valeurs simples d'images et de nombres dérivés pour compléter l'étude).