# Interrogation Écrite n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 mai 2014

1. Cf le cours.
2. Notons $D$ le déterminant à calculer, en factorisant la première ligne par $a$, on trouve $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$. On peut alors effectuer l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - bL_1$, qui ne modifie pas le déterminant, pour trouver $D = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-b & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$. Un petit développement suivant la deuxième ligne (un seul coefficient non nul) et on se ramène à $D = a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & c \\ b & c & d \end{vmatrix}$ (attention au changement de signe, le coefficient non nul est situé deuxième ligne première colonne). On peut recommencer exactement le même genre d'opérations : $L_2 \leftarrow L_2 - cL_1$ puis développement suivant la deuxième ligne : $D = a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-c & 0 & 0 \\ b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$. On ne peut évidemment pas factoriser plus.
3. 
   - C'est la probabilité que le joueur perde ses cinq parties, qui vaut $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$ puisque les parties sont indépendantes les unes des autres.
   - On a déjà calculé $P(X=0)$, qui est la même chose que $P(Y=0)$. Précisons en passant que $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$. Pour que $(X=1)$ soit réalisé, le joueur doit gagner une partie, avec proba $\frac{1}{3}$ et perdre les quatre autres, avec proba $\frac{2}{3}$ à chaque fois, mais il ne faut pas oublier le choix de la partie gagnée (une parmi cinq), donc $P(X=1) = \binom{5}{1} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243}$. De même, on calcule $P(X=2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$ ; puis $P(X=3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$ ; $P(X=4) = 5 \times \frac{1}{3^4} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{243}$, et $P(X=5) = \frac{1}{243}$. On vérifie aisément que $\frac{32+80+80+40+10+1}{243} = 1$, et on peut résumer la loi dans le tableau suivant :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{32}{243}$ | $\frac{80}{243}$ | $\frac{80}{243}$ | $\frac{40}{243}$ | $\frac{10}{243}$ | $\frac{1}{243}$ |

   - Lançons-nous joyeusement dans ce palpitant calcul : $E(X) = \frac{80+160+120+40+5}{243} =$

$\dfrac{405}{243} = \dfrac{5}{3}$. Pour la variance, on utilise comme souvent la formule de König-Huygens : $E(X^2) = \dfrac{80+320+360+160+25}{243} = \dfrac{945}{243} = \dfrac{35}{9}$, puis $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{35}{9} - \dfrac{25}{9} = \dfrac{10}{9}$.

- La variable $Y$ peut prendre les mêmes valeurs que $X$, et on a déjà calculé $P(Y = 0)$. L'événement $Y = 1$ est réalisé si le joueur gagne sa première partie, donc $P(Y = 1) = \dfrac{1}{3}$. L'événement $Y = 2$ est réalisé si le joueur perd la première partie et gagne la deuxième, donc $P(Y = 2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$. De même, on calcule $P(Y = 3) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{27}$, puis $P(Y = 4) = \dfrac{8}{81}$ et enfin $P(Y = 5) = \dfrac{16}{243}$. On vérifie si on le souhaite que la somme de ces probabilités vaut $\dfrac{32+81+54+36+24+16}{243} = 1$. Un joli tableau pour résumer :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y = k)$ | $\frac{32}{243}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{4}{27}$ | $\frac{8}{81}$ | $\frac{16}{243}$ |

On calcule une nouvelle fois avec entrain : $E(Y) = \dfrac{81+108+108+96+80}{243} = \dfrac{473}{243}$. Ah mince, ça ne se simplifie pas du tout. Calculons tout de même $E(X^2) = \dfrac{81+216+324+384+400}{243} = \dfrac{1\ 405}{243}$, qui ne simplifie pas plus, et contentons-nous d'écrire via la formule de König-Huygens que $V(X) = \dfrac{1405}{243} - \left(\dfrac{473}{243}\right)^2$.

- Si on sait que l'événement $Y = 3$ est réalisé, notre joueur a perdu ses deux premières parties et gagné la troisième. Pour que $X = 2$ soit réalisé, il faut qu'il gagne exactement une des deux parties restantes, ce qui se produit avec probabilité $2 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3}$, donc $P_{Y=3}(X = 2) = \dfrac{4}{9}$. Cette valeur n'étant pas égale à $P(X = 2)$, les deux événements ne sont pas indépendants.
- On sait déjà que la probabilité qu'il gagne au moins une partie un jour donné vaut $1 - \dfrac{32}{243} = \dfrac{211}{243}$. Puisqu'il y a sept jours dans une semaine, pour que l'événement $Z = k$ soit vérifié, il doit gagner au moins une partie $k$ fois, perdre toutes ses parties $7-k$ fois, et il reste à choisir les jours où il va gagner, ce qui donne $P(Z = k) = \dbinom{7}{k} \times \left(\dfrac{211}{243}\right)^k \times \left(\dfrac{32}{243}\right)^{7-k}$ (pour $k$ compris entre 0 et 7). On laissera au lecteur le soin de calculer l'espérance et la variance de $Z$.