Interrogation Écrite n°4

PTSI B Lycée Eiffel

17 décembre 2013

1. Comme d'habitude, je vous renvoie au cours.
2. Comme d'habitude, je vous renvoie au cours (mais ceux qui n'ont même pas signalé que le produit de deux matrices inversibles est inversible n'ont pas bien saisi l'ordre d'importance des différents résultats du cours).
3. On calcule donc $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & -14 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -5 & 11 & -3 \\ 2 & -7 & 1 \\ -6 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.
4. On peut écrire $D = I_3 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui vérifie $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. La matrice N est nilpotente, et commute évidemment avec I_3, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour obtenir $D^n = (N + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k}$. Comme on a $D^k = 0$ pour tous les entiers supérieurs ou égaux à 3, $D^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Appliquons bêtement l'algorithme du pivot de Gauss :

$$E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 9 & -15 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice E est donc inversible, d'inverse $E^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

6. Ah, et la question subsidiaire alors ? Eh bien, on peut écrire $E = S+A$ avec $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ qui est une matrice symétrique, et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ qui est antisymétrique. Certes, mais pourquoi ces deux matrices ? Eh bien, je vous laisse vérifier que $S = \dfrac{E +^t E}{2}$ et $A = \dfrac{E -^t E}{2}$. Il est clair que la somme de ces deux matrices vaut E, que S est symétrique (par linéarité de la transposition), et que A est antisymétrique. Vous pourrez prouver en exercice que, quelle que soit la matrice dont on part, on peut la décomposer de façon unique via cette technique.