Dérivées

1. $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$; $f'(x) = -\dfrac{12}{x^5}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$; on peut exploiter le fait que $f(x) = 1 - \dfrac{x}{x^2+x+1}$ pour obtenir plus rapidement $f'(x) = -\dfrac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$.
3. $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$; $f'(x) = \cos(x)\cos(2x) - 2\sin(x)\sin(2x) = \cos(x)(2\cos^2(x)-1) - 4\sin^2(x)\cos(x) = 2\cos^3(x) - \cos(x) - 4\cos(x) + 4\cos^3(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$. On peut également simplifier f avant de dériver : $f(x) = 2\sin(x)\cos^2(x) - \sin(x)$, donc $f'(x) = 2\cos^3(x) - 4\sin^2(x)\cos(x) - \cos(x) = 2\cos^3(x) - 4\cos(x) + 4\cos^3(x) - \cos(x)$, qui donne bien sûr le même résultat que ci-dessus.
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $f'(x) = -\dfrac{2x}{2(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.
5. $f(x) = \dfrac{\tan(2x)}{\tan(x)}$; comme $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$, on peut simplifier f sous la forme $f(x) = \dfrac{2}{1-\tan^2(x)}$, puis calculer $f'(x) = \dfrac{4\tan(x)(1+\tan^2(x))}{(1-\tan^2(x))^2} = \dfrac{4\sin(x)\cos(x)}{(\cos^2(x)-\sin^2(x))^2}$ en multipliant numérateur et dénominateur par $\cos^4(x)$. Alternativement, on dérive directement pour obtenir $f'(x) = \dfrac{\frac{2\tan(x)}{\cos^2(2x)} - \frac{\tan(2x)}{\cos^2(x)}}{\tan^2(x)}$, que le splus courageux d'entre vous s'amuseront à simplifier.
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln(x)}}$; $f'(x) = -\dfrac{\frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}}{\ln(x)} = -\dfrac{1}{2(\ln(x))^{\frac{3}{2}}}$ (ce qu'on peut obtenir directement puisque $f(x) = (\ln(x))^{-\frac{1}{2}}$.
7. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$; $f'(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$.
8. $f(x) = \arctan(\sqrt{x^3+1})$; $f'(x) = \dfrac{\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}}{2+x^3} = \dfrac{3x^2}{2(2+x^3)\sqrt{1+x^3}}$.
9. $f(x) = \tan^3(3x)$; $f'(x) = 9\tan^2(3x)(1+\tan^2(3x)) = \dfrac{9\tan^2(3x)}{\cos^2(3x)}$, qu'on laissera sous cette forme car en une heure on ne peut pas se permettre de perdre trop de temps en simplifications inutiles.
10. $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt$. En notant $g(t) = \dfrac{e^t}{t}$, et G une primitive quelconque de g, on peut écrire $f(x) = G(x^2) - G(x)$, donc en dérivant $f'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \dfrac{2xe^{x^2}}{x^2} - \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{2e^{x^2} - e^x}{x}$.

Intégrales

1. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} e^{3x-2}\, dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x-2}\right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{3}(e^{3\ln(2)-2} - e^{-2}) = \frac{8-1}{3e^2} = \frac{7}{3\ln(2)}$. Si on aime vraiment les changements de variable, on peut toujours commencer par poser $t = 3x-2$.
2. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\, dx = \left[-\frac{1}{x} + \ln(x)\right]_1^e = -\frac{1}{e} + 1 + 1 = 2 - \frac{1}{e}$.
3. $\displaystyle\int_0^\pi \cos^3(x)\, dx = \int_0^\pi \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)\, dx = \left[\frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)\right]_0^\pi = 0$.
4. $\displaystyle\int_1^e x\ln(x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$ (par IPP).

5. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x^3-1}\ dx = \left[\frac{1}{3}\ln(x^3-1)\right]_2^3 = \frac{1}{3}(\ln(26)-\ln(7)) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{26}{7}\right)$.

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}\ dx = [x\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\ dx = \frac{\pi}{4} - [-\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$ (par IPP).

7. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\ dx = \int_0^2 \frac{1}{1+t} \times 2t\ dt = \int_0^2 2 - \frac{2}{1+t}\ dt = [2t - 2\ln(1+t)]_0^2 = 4 - 2\ln(3)$ (changement de variable $t = \sqrt{x}$).

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\ dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$ (intégration directe).

9. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x\cos(x^2)\ dx = \left[\frac{1}{2}\sin(x^2)\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (encore une intégration directe).

10. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2+3x+2}\ dx \int_0^2 \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\ dx = [2\ln(x+2) - \ln(x+1)]_0^2 = 2\ln(4) - 2\ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.