NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

15 octobre 2013

1. C'est dans le cours.
2. On calcule aisément $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2+k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
La propriété est vrai au rang 1 car $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1\times 2 = 2 = \frac{1\times 2\times 3}{3}$. Supposons-la vraie au rang n, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$, ce qui prouve P_{n+1}. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier n.
3. L'application f étant paire, il est très facile de constater qu'elle ne peut pas être injective : par exemple $f(2) = f(-2) = \dfrac{8}{3}$. Mais soyons plus précis : si $f(x) = f(x')$, alors $\dfrac{2x^2}{x^2-1} = \dfrac{2x'^2}{x'^2-1}$, donc $2x^2x'^2 - 2x^2 = 2x'^2x^2 - 2x'^2$, soit $x^2 = x'^2$. Cela se produit si $x = x'$ mais aussi si $x' = -x$, l'application n'est donc pas injective. Pour la surjectivité, cherchons à quelles conditions l'équation $f(x) = y$ admet des solutions. Elle peut s'écrire $\dfrac{2x^2}{x^2-1} = y$, soit $2x^2 = x^2y - y$, donc $x^2 = \dfrac{y}{y-2}$. Cette équation n'admet des solutions que si $\dfrac{y}{y-2} \geqslant 0$, soit $y \in]-\infty, 0] \cup]2, +\infty[$. L'application f n'est donc pas surjective non plus, et bien évidemment pas bijective.
4. • La fonction f est définie à deux conditions : $2x-1 \in [-1,1]$, c'est-à-dire $x \in [0,1]$, et $\dfrac{1-x}{x} \geqslant 0$, soit $x \in]0,1]$ (la fonction arctan étant ensuite définie sur $\mathbb{R}$). Finalement, $\mathcal{D}_f =]0,1]$.
Pour calculer la dérivée, on procède par étapes : $\left(\dfrac{1-x}{x}\right)' = \dfrac{-x-(1-x)}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$, puis $\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x(1-x)}}$. Enfin, $2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)' = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x(1-x)}} \times \dfrac{2}{1+\frac{1-x}{x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. Comme par ailleurs $(\arcsin(2x-1))' = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, on obtient finalement $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} - \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = 0$. Autrement dit, la fonction f est constante sur $]0,1]$. Calculons par exemple $f(1) = \arcsin(1) + 2\arctan(0) = \dfrac{\pi}{2}$.
L'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ admet donc comme solutions tous les réels de l'intervalle $]0,1]$.
   • Si $x \in \mathcal{D}_{\{}$, $x \in]0,1]$, donc $\sqrt{x}$ et $\sqrt{x} \in]0,1]$, ce qui permet certainement de définir $\theta = \arcsin(\sqrt{x})$ (la fonction arcsin étant définie sur $[-1,1]$). De plus, $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut certainement prendre le sinus des deux côtés de la définition de θ pour obtenir $\sqrt{x} =$

$\sin(\theta)$ puis $x = \sin^2(\theta)$. On en déduit que $2x - 1 = 2\sin^2(\theta) - 1 = -\cos(2\theta)$; et que $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = \sqrt{\dfrac{1-\sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}} = \sqrt{\dfrac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}} = \dfrac{1}{\tan(\theta)}$ (tout est positif sur l'intervalle où se trouve θ, et on conviendra que si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, alors $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = 0$). Comme $\dfrac{1}{\tan(\theta)} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$, et $-\cos(2\theta) = \sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$, on peut en déduire que $f(x) = 2\theta - \dfrac{\pi}{2} + 2\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (en effet, $2\theta - \dfrac{\pi}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et $\dfrac{\pi}{2} - \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ce qui permet de simplifier $\arcsin \circ \sin$ et $\arctan \circ \tan$). On retrouve évidemment le résultat précédent.