Devoir surveillé n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

17 mai 2014

Exercice 1

1. Pour simplifier le calcul, on peut additionner la dernière colonne à chacune des deux premières avant de développer suivant la dernière ligne : $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Plus la peine de se fatiguer, il y a une colonne nulle donc $\det(A) = 0$. La matrice A n'est donc pas inversible, et f n'est pas bijective.

2. Pour déterminer le noyau, on va résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & 7y & - & 5z & = & 0 \\ -3x & - & 5y & + & 3z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$ (on a divisé la dernière équation par 2 pour simplifier). Les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$ ramènent au système équivalent $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & & & = & 0 \\ & - & 2y & & & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$. On a donc $y = 0$ et $x = z$, soit $\ker(f) = \text{Vect}((1, 0, 1))$. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 1$. Pour l'image, on prend l'espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice A, en supprimant la derinère qui est l'opposé de la première : $\text{Im }(f) = \text{Vect}((5, -3, -2), (7, -5, -2))$, et $\dim(\text{Im }(f)) = 2$ (cohérent avec le théorème du rang).

3. (a) Le plus simple ici est de résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & a \\ & - & y & + & z & = & b \\ x & - & y & & & = & c \end{array} \right.$. Les deux dernières équations donnent $z = b + y$ et $x = c + y$, on reporte dans la première : $c + y + 2y - b - y = a$, donc $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$, puis $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ et $z = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}c$, donc P est bien inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Calculons donc $AP = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   (c) On calcule, à l'aide de la matrice A, $f(2, -1, -1) = (8, -4, -4) = 4(2, -1, -1)$ et $f(-1, 1, 0) = (2, -2, 0) = -2(-1, 1, 0)$. Cela correspond logiquement aux deux dernières colonnes de la matrice $P^{-1}AP$, qui n'est autre que la matrice représentative de f dans la base $((1, 0, 1), (2, -1, -1), (-1, 1, 0))$ (puisque P est la matrice de passage de la base canonique vers cette base).

4. (a) Pour calculer rapidement le déterminant, on peut ajouter $(\lambda - 1)L_3$ à L_1 puis développer suivant la première colonne : $\det(P - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -1 \\ 0 & -1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 3-\lambda & -1+\lambda-\lambda^2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1+\lambda-\lambda^2 \\ -1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 3-\lambda+(1+\lambda)(-1+\lambda-\lambda^2) =$ $2-\lambda-\lambda^3$. Coup de chance, le polynôme $-X^3-X+2$ admet 1 comme racine évidente, et peut donc se factoriser sous la forme $-X^3-X+2 = (X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c$, avec par identification des coefficients, $a=-1$, $b=-1$ et $c=-2$. On en déduit que $-\lambda^3-\lambda+2 = -(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+2)$. Le deuxième facteur ayant un discriminant négatif, on ne peut pas factoriser plus dans $\mathbb{R}$.

(b) La matrice n'est pas inversible si le déterminant qu'on vient de calculer est nul, ce qui ne peut se produire que si $\lambda = 1$.

(c) Supposons donc que P soit diagonalisable, et notons g l'application ayant pour matrice P dans la base canonique. Diagonaliser P revient à trouver une autre base (u,v,w) dans laquelle la matrice de g est diagonale. Autrement dit, les vecteurs de notre nouvelle base doivent vérifier des relations du type $g(u)=\lambda_1 u$, $g(v)=\lambda_2 v$ et $g(w)=\lambda_3 w$. Or, on vient de voir que $g-\lambda\,\mathrm{id}$ est une application bijective si $\lambda\neq 1$ (puisque son déterminant est non nul). Les réels λ_1, λ_2 et λ_3 sont donc forcément égaux à 1, ce qui signifie que la matrice de g dans la base (u,v,w) est la matrice identité. On a donc $Q^{-1}PQ = I$, soit $P = QQ^{-1} = I$, ce qui est absurde. La matrice P ne peut donc pas être diagonalisable.

Exercice 2

1. L'énoncé nous donne $a_0 = 1$, donc en appliquant les règles décrites dans ce même énoncé, $a_1 = \frac{2}{3}$ et $b_1 = c_1 = \frac{1}{6}$. Ensuite, on a besoin d'appliquer la formule des probabilités totales au système d'événements (A_1, B_1, C_1) (qui est certainement un système complet) pour obtenir $a_2 = P(A_1)\times P_{A_1}(A_2)+P(B_1)\times P_{B_1}(A_2)+P(C_1)\times P_{C_1}(A_2) = \frac{2}{3}a_1+\frac{1}{6}b_1+\frac{1}{6}c_1 = \frac{4}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. De même, on obtient $b_2 = c_2 = \frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36} = \frac{1}{4}$.
2. C'est la même chose que ce qu'on vient d'utiliser, mais pour passer du rang n au rang $n+1$: $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{6}c_n$; $b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n+\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{6}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{6}a_n+\frac{1}{6}b_n+\frac{2}{3}c_n$.
3. (a) L'égalité $b_n = c_n$ se prouve rigoureusement par une récurrence essentiellement triviale : c'est vrai au rang 0 (et même 1 et 2 vu les calculs déjà effectués), et si $b_n = c_n$, alors $\frac{1}{6}b_n+\frac{2}{3}c_n = \frac{2}{3}b_n+\frac{1}{6}c_n$, et $b_{n+1} = c_{n+1}$. On sait par ailleurs que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, donc $a_n+b_n+c_n = 1$, soit $a_n = 1-b_n-c_n = 1-2b_n$.

   (b) En décalant la relation obtenue plus haut, $a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{6}b_{n+1}+\frac{1}{6}c_{n+1} = \frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}b_{n+1} = \frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{18}a_n+\frac{5}{18}b_n$. Or, $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n$, donc $b_n = 3a_{n+1}-2a_n$. En remplaçant, on trouve donc $a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{18}a_n+\frac{5}{6}a_{n+1}-\frac{5}{9}b_n = \frac{3}{2}a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n$.

   (c) On reconnait évidemment une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} = 0$. Si on s'est endormi et qu'on ne voit pas la racine évidente, on calcule $\Delta = \frac{9}{4}-2 = \frac{1}{4}$, puis $r_1 = \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$. On peut donc affirmer que $a_n = A+\frac{B}{2^n}$, avec $a_0 = 1 = A+B$, et $a_1 = \frac{2}{3} = A+\frac{B}{2}$. En soustrayant les deux équations, on a $\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$, soit $B = \frac{2}{3}$, et donc $A = \frac{1}{3}$. Autrement dit, $a_n = \frac{1}{3}+\frac{1}{3.2^{n-1}}$. Comme $a_n = 1-2b_n$, on en déduit que $b_n = \frac{1-a_n}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3.2^n} = \frac{1}{3}-\frac{1}{3.2^n}$. Même valeur pour c_n, bien entendu.

(d) Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on trouve que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}$. À long terme, le professeur piquera ses sujets sur les trois sites avec probabilités uniformes (ce qui ne signifie pas que les trois sites vont alterner régulièrement, on aura plutôt des séries de feuilles successives prises sur un même site dans la mesure où les probabilités conditionnelles sont désiquilibrées).

4. (a) La matrice A initialement dans l'énoncé vérifiait manifestement $A = J + 3I$. Si on la divise par 6, on obtiendra plutôt $A = \frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J$.

(b) On se convainc très facilement que $J^n = 3^{n-1}J$ (si $n \neq 1$), ce qui se démontre très facilement par récurrence. Pour $n = 2$, on a en effet $J^2 = 3J$ (la matrice ne contient que des 3), et si la formule est vraie au rang n, alors $J^{n+1} = J^n \times J = \frac{1}{3^{n-1}}J^2 = \frac{1}{3^n}J$.

(c) Allons-y donc pour notre récurrence. Au rang 1, c'était la question a, pas besoin d'initialiser. Supposons donc la formule vérifiée au rang n, alors $A^{n+1} = A^k \times A =$ $\left(\frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}J\right)\right)\left(\frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J\right) = \frac{1}{2^{n+1}}I + \frac{1}{6}\frac{1}{2^n}J + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J + \frac{1}{18}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J^2 =$ $\frac{1}{2^{n+1}}I + \frac{1}{6}J + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J = \frac{1}{2^{n+1}}I + \frac{1}{6}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)J = \frac{1}{2^{n+1}}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)J$. C'est bon, ça marche ! En constatant que $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.2^{n-1}}$, on peut donc écrire

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{3.2^{n-1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3.2^n} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3.2^n} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3.2^n} & \frac{1}{3} + \frac{1}{3.2^{n-1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3.2^n} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3.2^n} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3.2^n} & \frac{1}{3} + \frac{1}{3.2^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

(d) C'est une récurrence facile : $A^0X_0 = X_0$ est évident. Supposons donc que $X_n = A^nX_0$, alors $A^{n+1}X_0 = A \times X_n = A \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = X_{n+1}$ (ce sont exactement les relations de la question 2 qui apparaissent dans le calcul).

(e) Puisque $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, A^nX_0 est simplement constituée de la première colonne de la matrice A^n. Autrement dit, $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.2^{n-1}}$, et $b_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.2^n}$. Ô suprise, ce sont les mêmes valeurs qu'à la question 3 ! Et donc les mêmes limites, égales toutes trois à $\frac{1}{3}$.

Exercice 3

1. (a) En trois étapes, il n'y a que huit possibilités pour les déplacements, dont on va brutalement faire la liste (on note A pour « avance » et 0 pour « retourne à l'origine » pour simplifier) :
   - AAA est la seule possiblité pour avoir $X_3 = 3$, avec probabilité $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.
   - 0AA est la seule possibilité pour avoir $X_3 = 2$, avec probabilité $\frac{2}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$.
   - 00A et A0A donneront $X_3 = 1$, avec proba $\frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$.
   - les quatre autres possibilités (000, 0A0, A00 et AA0) donneront $X_3 = 0$, soit une proba $\frac{8}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{2}{3}$.

   On peut résumer la loi de X_3 dans le superbe tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X_3 = k)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$

(b) Calculons donc : $E(X_3) = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{1}{9} = \frac{13}{27}$. On va bien sûr appliquer la formule de König-Huygens pour la variance : $E(X_3^2) = \frac{2}{9} + \frac{8}{27} + \frac{1}{3} = \frac{23}{27}$, puis $V(X) = \frac{23}{27} - \frac{13^2}{27^2} = \frac{621 - 169}{27^2} = \frac{452}{729}$ (ce qui ne se simplifie pas le moins du monde).

(c) Supposons donc l'événement $X_1 = 1$ réalisé. Pour que $X_3 = 1$ soit réalisé, il faut absolument qu'aux deuxième et troisième déplacement, l'objet retourne à l'origine, puis avance d'une case. Autrement dit, $P_{X_1=1}(X_3 = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Cette probabilité étant bel et bien égale à $P(X_3 = 1)$, les événements sont indépendants. C'est inattendu dans la mesure où on s'attendrait à ce que la position après trois déplacement dépende fortement de ce qui s'est passé avant.

2. (a) Ca semble évident, mais pour le prouver rigoureusement, rien de tel qu'une bonne récurrence. On a évidemment $X_0(\Omega) = \{0\}$. Ensuite, si on suppose $X_n(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$, le mobile peut avancer d'une case à partir de n'importe quelle case où il se trouve, donc se trouver sur une des cases $1; 2; \dots; n+1$; ou revenir à la case 0, ce qui donne bien $X_{n+1}(\Omega) = \{0; 1; \dots; n+1\}$.

(b) Le système $(X_{n-1} = 0, X_{n-1} = 1, \dots, X_{n-1} = n-1)$ forme un système complet d'événements au vu de la question précédente, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{k=n-1} P(X_{n-1} = k) \times P_{X_{n-1}=k}(X_n = 0)$. Or, toutes ces probabilités conditionnelles sont égales à $\frac{2}{3}$ au vu de l'énoncé, donc $P(X_n = 0) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{k=n-1} P(X_{n-1} = k)$. Cette dernière somme valant 1 (c'est la somme des probabilités correspondant à la variable aléatoire X_{n-1}), on a donc $P(X_n = 0) = \frac{2}{3}$.

(c) On peut utiliser à nouveau la formule des probabilités totales (toutes les probabilités conditionnelles sont nulles sauf une), ou plus simplement signaler que, pour avoir $X_n = k$ avec $k \neq 0$, on doit avoir $X_{n-1} = k-1$ et avancer d'une case, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{3}$.

(d) Pour éviter une récurrence (forte qui plus est), utilisons une rédaction moins rigoureuse : $P(X_n = k) = \frac{1}{3} P(X_{n-1} = k-1) = \frac{1}{3^2} P(X_{n-2} = k-2) = \dots = \frac{1}{3^k} P(X_{n-k} = 0) = \frac{1}{3^k} \times \frac{2}{3}$. Cette formule est d'ailleurs également valable lorsque $k = 0$. De même, on obtient simplement $P(X_n = n) = \frac{1}{3^n} P(X_0 = 0) = \frac{1}{3^n}$ (puisque l'événement $X_0 = 0$ est certain, contrairement à $X_{n-k} = 0$ quand $k < n$). Ce dernier résultat est logique : pour se retrouver sur la case n après n instants, il faut à chaque fois avancer d'une case (et donc ne jamais revenir à la case 0), ce qui se produit à chaque instant avec probabilité $\frac{1}{3}$.

(e) Calculons donc $\sum_{k=0}^{k=n} P(X_n = k) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n} = 1$.

3. (a) Calculons donc en développant : $(1-p)^2 \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} - 2\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)p^k - 2\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + \sum_{k=2}^{n} (k-1)p^k = \sum_{k=0}^{n-2} p^k + \sum_{k=0}^{n-2} kp^k - 2\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + \sum_{k=2}^{n} kp^k - \sum_{k=2}^{n} p^k = 1 + p - p^{n-1} - p^n + p - 2p - 2(n-1)p^{n-1} + (n-1)p^{n-1} + np^n = 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n$.

(b) On sait que $E(X_n) = \sum_{k=1}^{k=n} kP(X_n = k) = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{n-1} k \times \frac{1}{3^{k-1}} + \frac{n}{3^n}$. En appliquant le résultat précédent à $p = \frac{1}{3}$, on a $\frac{4}{9}\sum_{k=1}^{n-1} k \times \frac{1}{3^{k-1}} = 1 - \frac{n}{3^{n-1}} + \frac{n-1}{3^n}$, donc $E(X_n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{3^{n-1}} + \frac{n-1}{3^n}\right) + \frac{n}{3^n} = \frac{1}{2} + \frac{n-1-3n+2n}{2 \times 3^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}$.

4. (a) En effet, en développant, $E(X_{n+1}^2) = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_n = k-1) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 P(X_n = k) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} k^2 P(X_n = k) + 2\sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) + \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k)\right)$.
On reconnait dans la première sonmme $E(X_n^2)$, dans la deuxième $E(X_n)$, et la dernière vaut 1 (somme des probabilités de la variable X_n), d'où la formule.

(b) Allons-y : $u_{n+1} = E(X_{n+1}^2) + \frac{1}{2} \times \frac{2n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1) + \frac{1}{2} \times \frac{2n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}E(X_n^2) + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2 \times 3^n} + \frac{1}{3} + \frac{n}{3^{n+1}} + \frac{1}{2 \times 3^{n+1}} = \frac{1}{3}E(X_n^2) + \frac{2}{3} - \frac{1}{\times 3^{n+1}} + \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}E(X_n^2) + \frac{2}{3} + \frac{2n-1}{2 \times 3 \times 3^n} = \frac{1}{3}\left(E(X_n^2) + \frac{2n-1}{2 \times 3^n}\right) + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}$.

(c) La suite (u_n) est donc arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, qui donne $x = 1$. On pose donc $v_n = u_n - 1$, et on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 1) = \frac{1}{3}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique, de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = E(X_0^2) + \frac{1}{2} \times \frac{-1}{3^0} - 1 = 0 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$. On en conclut que $v_n = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{3^n} = -\frac{1}{2 \times 3^{n-1}}$, puis $u_n = v_n + 1 = 1 - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}$. Ne reste plus qu'à en déduire que $E(X_n^2) = u_n - \frac{2n-1}{2 \times 3^n} = 1 + \frac{1-2n-3}{2 \times 3^n} = 1 - \frac{n+1}{3^n}$.

(d) On peut enfin, pour terminer, appliquer la formule de König-Huygens, qui donne $V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = 1 - \frac{n+1}{3^n} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2 \times 3^n} - \frac{1}{4 \times 3^{2n}}$.

5. (a) C'est la somme des numéros de cases sur lesquelles l'objet est passé lors des n premiers déplacements.

(b) Allons-y bourrinement comme pour X_3 :
- AAA donne $S_3 = 6$ avec proba $\frac{1}{27}$.
- AA0 et 0AA donnent $S_3 = 3$ avec proba $\frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{4}{27}$.
- A0A donne $S_3 = 2$ avec proba $\frac{2}{27}$.
- A00, 0A0 et 00A donnent $S_3 = 1$ avec proba $3 \times \frac{4}{27} = \frac{12}{27}$.
- 000 donne $S_3 = 0$ avec proba $\frac{8}{27}$.

Allez, un joli tableau pour résumer (sans simplifier la seule fraction simplifiable, ça ne sert à rien) :

k	0	1	2	3	6
$P(X_3 = k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{27}$

On calcule ensuite $E(S_3) = \dfrac{12+4+12+6}{27} = \dfrac{34}{27}$, puis $E(S_3^2) = \dfrac{12+8+36+36}{27} = \dfrac{92}{27}$ et enfin $V(S_3) = \dfrac{92}{27} - \dfrac{34^2}{27^2} = \dfrac{2484-1156}{729} = \dfrac{1328}{729}$ (qui ne se simplifie toujours pas).

(c) On peut bien sûr utiliser la linéarité de l'espérance : $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} E(X_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 1 - \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{n+1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4.3^n} = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4.3^n}$.