Devoir surveillé n°8

PTSI B Lycée Eiffel

17 mai 2014

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

On cherche à étudier dans cet exercice la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ -3 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. On notera f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique.

1. Calculer le déterminant de la matrice A. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f, et donner leur dimension.
3. On donne la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice P est inversible, et déterminer son inverse P^{-1}.
   (b) Calculer $P^{-1}AP$.
   (c) Calculer $f(2,-1,-1)$ et $f(-1,1,0)$, et interpréter les résultats obtenus.
4. On souhaite désormais étudier un peu plus précisément la matrice P.
   (a) Soit λ un réel quelconque, calculer $\det(P - \lambda I_3)$, et factoriser ce déterminant.
   (b) En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $P - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
   (c) Montrer que la matrice P n'est pas diagonalisable (autrement dit qu'il n'existe pas de matrice inversible Q telle que $Q^{-1}PQ$ soit diagonale).

Exercice 2

Un professeur de mathématiques paresseux pompe honteusement ses exercices sur trois sites web notés pour toute la suite de l'exercice A, B et C. Comme il fait un peu d'informatique à ses heures perdues, il numérote ses feuilles d'exercices à partir de 0. On dispose des informations suivantes :

- la feuille d'exercices 0 a été piquée sur le site A.
- si la feuille numéro n est piquée sur un site, la feuille $n+1$ sera piquée sur le même site avec probabilité $\dfrac{2}{3}$, et sur chacun des deux autres sites avec probabilité $\dfrac{1}{6}$ chacun.

On note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événément « La feuille numéro n est issue du site A (respectivement B et C) », et a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes.
Les questions 3 et 4 de cet exercice sont complètement indépendantes, il est interdit de reprendre les résultats d'une de ces questions pour répondre à l'autre.

1. Calculer les probabilités a_2, b_2 et c_2.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer des relations de récurrence exprimant a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3. Dans cette question, on souhaite résoudre le problème sans avoir recours aux matrices.
   (a) Expliquer pourquoi les relations $b_n = c_n$ et $a_n = 1 - 2b_n$ sont vérifiées pour tout entier naturel n.
   (b) Prouver que la suite (a_n) vérifie la relation de récurrence $a_{n+2} = \dfrac{3}{2}a_{n+1} - \dfrac{1}{2}a_n$ (seule la première relation de la question précédente est utile pour cette question).
   (c) En déduire la valeur de a_n, puis celles de b_n et de c_n.
   (d) Déterminer les limites de ces trois suites, et interpréter le résultat obtenu.
4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Exprimer M comme combinaison linéaire des matrices J et I_3.
   (b) Que vaut la matrice J^n (on fera une démonstration rapide) ?
   (c) Montrer par récurrence que, $\forall n \geqslant 1$, $M^n = \dfrac{1}{2^n}I + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)J$. En déduire l'expression de la matrice M^n.
   (d) En notant X_n la matrice-colonne constituée des probabilités a_n, b_n et c_n, démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
   (e) En déduire les valeurs de a_n, b_n et c_n, ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Un objet se déplace sur un axe constitué d'une suite (infinie) de cases numérotées 0, 1, 2, ...
L'objet est initialement positionné sur la case 0 et se déplace selon la règle suivante : s'il est sur la case numéro k à l'instant n, alors, à l'instant $n+1$, il avancera sur la case $k+1$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$, ou reviendra à la case 0 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case sur laquelle se trouve l'objet à l'instant n.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 3$.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_3 (on commencera bien entendu par préciser $X_3(\Omega)$).
   (b) Calculer $E(X_3)$ et $V(X_3)$.
   (c) Calculer la probabilité $P_{X_1=1}(X_3 = 1)$. Les événements $X_1 = 1$ et $X_3 = 1$ sont-ils indépendants ? Ce résultat est-il surprenant ?
2. On revient au cas général.
   (a) Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant rigoureusement votre réponse.
   (b) Démontrer tout aussi rigoureusement que, $\forall n \geqslant 1$, $P(X_n = 0) = \frac{2}{3}$.
   (c) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, $P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{3}P(X_n = k-1)$.
   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\}$, $P(X_n = k) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^k}$. En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
   (e) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.
3. On cherche désormais à calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n.
   (a) Calculer (et simplifier) $(1-p)^2 \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1}$, où $p \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $E(X_n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.
4. Après l'espérance, la variance !
   (a) Montrer, en utilisant la question 2.c, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}^2) = \frac{1}{3}(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E(X_n^2) + \frac{1}{2} \times \frac{2n-1}{3^n}$.
   Montrer que $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}$.
   (c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction n.
   (d) Calculer enfin $V(X_n)$ (on ne cherchera pas à simplifier l'expression obtenue).
5. On définit pour cette dernière question une nouvelle variable aléatoire $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$.
   (a) Que représente la variable aléatoire S_n ?
   (b) Donner la loi et calculer l'espérance et la variance de la variable S_3.
   (c) En utilisant les résultats des questions précédentes, calculer l'espérance de la variable aléatoire S_n.