Devoir surveillé n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 avril 2014

Exercice 1

1. Deux choses à vérifier : φ est linéaire puisque $\varphi(\lambda P+Q) = (X^2+1)(\lambda P(1)+Q(1))+\lambda P+Q = \lambda(X^2+1)P(1)+\lambda P+(X^2+1)Q(1)+Q = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$. De plus, $\varphi(P)$ est toujours un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 puisqu'il est somme de $(X^2+1)P(1)$, qui est de degré 2 au plus (et même de degré 2 exactement, sauf si $P(1)=0$), et de P qui est de degré inférieur ou égal à 2. L'application φ est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3, est la famille $(1, X, X^2)$. Calculons donc $\varphi(1) = (X^2+1)\times 1+1 = X^2+2$, puis $\varphi(X) = (X^2+1)\times 1+X = X^2+X+1$; et enfin $\varphi(X^2) = (X^2+1)\times 1+X^2 = 2X^2+1$. On peut donc affirmer que $\mathrm{Im}\ (\varphi) = \mathrm{Vect}(X^2+2, X^2+X+1, 2X^2+1)$. Reste à déterminer si la famille génératrice obtenue pour l'image est libre, ce qui n'est pas évident. Supposons donc que $a(X^2+2)+b(X^2+X+1)+c(2X^2+1) = 0$, soit $(a+b+2c)X^2+bX+2a+b+c = 0$. Un polynôme étant nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on obtient immédiatement $b=0$, puis $a+2c = 2a+c = 0$, ce qui n'est possible que si $a=c=0$. La famille est donc bel et bien libre, ce qui prouve que $\mathrm{rg}(\varphi)=3$, donc que φ est surjective puisqu'on a alors nécessairement $\mathrm{Im}\ (\varphi) = \mathbb{R}_2[X]$. Étant un endomorphisme dans un espace vectoriel de dimension finie, φ est alors injectif, et bijectif.
3. Calculons donc $\varphi^2(P) = \varphi((X^2+1)P(1)+P) = (X^2+1)(2P(1)+P(1))+(X^2+1)P(1)+P = 4(X^2+1)P(1)+P$. On en déduit que $\varphi^2(P)-4\varphi(P)+3P = 4(X^2+1)P(1)+P-4(X^2+1)P(1)-4P+3P = 0$. Bon, ben ça marche. On pouvait aussi poser plus brutalement $P = aX^2+bX+c$ et tout exprimer en fonction de a, b et c.
4. En reprenant l'égalité démontrée à la question précédente et en arrangeant un peu, on a $3\,\mathrm{id} = \varphi\circ(4\,\mathrm{id}-\varphi)$, ce qui suffit à prouver que $\varphi^{-1} = \frac{4}{3}\,\mathrm{id}-\frac{1}{3}\varphi$. On a donc $\varphi^{-1}(P) = \frac{4}{3}P-\frac{1}{3}\varphi(P) = P-\frac{1}{3}(X^2+1)P(1)$.
5. Il est temps d'expliciter $\varphi(P)$ en partant de $P = aX^2+bX+c$: $P(1) = a+b+c$, donc $\varphi(P) = (a+b+c)(X^2+1)+aX^2+bX+c = (2a+b+c)X^2+bX+a+b+2c$. Le polynôme P appartient à $\ker(\varphi-\mathrm{id})$ si $\varphi(P)=P$, soit $(2a+b+c)X^2+bX+a+b+2c = aX^2+bX+c$. Par identification, on obtient l'unique équation $a+b+c=0$ (la deuxième équation est toujours vérifiée, et la troisième est la même que la première), soit $\ker(\varphi-\mathrm{id}) = \{aX^2+bX-(a+b) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(X^2-1, X-1)$. Les plus malins avaient remarqué dès le départ que $P\in\ker(\varphi) \Leftrightarrow P(1)=0$, ce qui rend le résultat obtenu à peu près évident. Pour $\ker(\varphi-3\,\mathrm{id})$, on utilise la même méthode : $(2a+b+c)X^2+bX+a+b+2c = 3aX^2+3bX+3c$. L'identification du coefficient médian donne immédiatement $b=0$, et ensuite on a $-a+c = a-c = 0$, soit $a=c$. Autrement dit, $\ker(\varphi-3\,\mathrm{id}) = \{aX^2+a \mid a\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^2+1)$.
6. La famille étant constituée de trois polynômes, il suffit de montrer qu'elle est libre pour qu'elle soit une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Mais comme on nous demande ensuite les coordonnées de $P = aX^2+bX+c$ dans cette base, prouvons plutôt qu'elle est génératrice en cherchant à écrire $aX^2+bX+c = \lambda(X^2-1)+\mu(X-1)+\nu(X^2+1) = (\lambda+\nu)X^2+\mu X+(\nu-\lambda-\mu)$. L'identification donne immédiatement $\mu=b$, puis $\lambda+\nu=a$ et $\nu-\lambda-\mu=c$. Allez, on peut faire une substitution

ici : $\lambda = a - \nu$, donc $2\nu - \mu - a = c$, soit $\nu = \dfrac{a+b+c}{2}$, puis $\lambda = \dfrac{a-b-c}{2}$. La famille est donc génératrice, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et les coordonnées de P dans cette base sont $\left(\dfrac{a-b-c}{2}, b, \dfrac{a+b+c}{2}\right)$.

7. Le calcul de la question précédente permet immédiatement d'obtenir que $p(P) = \dfrac{a-b-c}{2}(X^2-1) + b(X-1)$, et $q(P) = \dfrac{a+b+c}{2}(X^2+1)$, donc $p(P) + 3q(P) = \dfrac{a-b-c}{2}X^2 + bX + \dfrac{-a-b+c}{2} + \dfrac{3a+3b+3c}{2}X^2 + \dfrac{3a+3b+3c}{2} = (2a+b+c)X^2 + bX + (a+b+2c)$, ce qui coïncide exactement avec la formule de $\varphi(P)$.

Exercice 2

On rappelle que, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, sa trace est définie par $\mathrm{Tr}(A) = a + d$. On considère ensuite l'application f définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = \mathrm{Tr}(A)B + CA$, où $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Les applications qui à une matrice associent l'un de ses coefficients sont linéaires par définition de la somme matricielle et du produit d'une matrice par un réel (qui se font terme à terme). La trace est la somme de deux telles applications, elle donc aussi linéaire, et étant à valeurs dans $\mathbb{R}$, est une forme linéaire.
2. Le noyau de la trace, qui est une forme linéaire non nulle, est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc de dimension $4 - 1 = 3$. Le noyau est simplement défini par l'équation $d = -a$, donc $\ker(f) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
3. Calculons donc $f(\lambda A + D) = \mathrm{Tr}(\lambda A + D)B + C(\lambda A + D) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A)B + \mathrm{Tr}(D)B + \lambda CA + CD = \lambda f(A) + f(D)$ en utilisant simplement la linarité de la trace.
4. Calculons donc $f(B) = B + CB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; puis $f(C) = 2B + C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (non, ces calculs n'ont absolument aucun intérêt).
5. Pour plus de légèreté dans la présentation, on assimilera les matrices aux quadruplets de vecteurs (a,b,c,d), et on notera donc $f(a,b,c,d) = (2a+2d, 0, a+d, -a-d) + (a-c, b-d, -a+c, -b+d) = (3a+2d-c, b-d, c+d, -a-b)$. Le noyau de f est donc obtenue en résolvant le système $3a + 2d - c = b - d = c + d = -a - b = 0$. Les trois dernières équations donnent rapidement $d = b$; $c = -d = -b$ et $a = -b$. En reportant dans la première, on trouve alors $-3b + 2b + b = 0$, ce qui est toujours vrai. On en déduit que $\ker(f) = \{(-b, b, -b, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$, ou plus matriciellement $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 1$. Pour l'image, on peut calculer les images des quatre matrices de la base canonique, ce qui donne (toujours présenté sous forme de quadruplets de réels) : $(3,0,0,-1)$; $(0,1,0,-1)$; $(-1,0,1,0)$ et $(2,-1,1,0)$. On sait déjà en appliquant le théorème du rang que la dimension de l'image doit être égale à 3, et on vérifie en effet que le quatrième vecteur est combinaison linéaire des trois autres : $(3,0,0,-1) - (0,1,0,-1) + (-1,0,1,0) = (2,-1,1,0)$. On en déduit que $\mathrm{Im}\ (f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
6. Puisque la somme de leurs dimensions est égale à 4, il suffit au chois de prouver que leur intersection est nulle, ou que leur somme est $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tout entier. On va plutôt prendre la

deuxième option car on a lu l'énoncé de la question suivante. Essayons donc d'écrire $(a, b, c, d) = x(-1, 1, -1, 1) + y(3, 0, 0, -1) + z(0, 1, 0, -1) + t(-1, 0, 1, 0)$. On va procéder par substitution ; la deuxième coordonnée donne $x + z = b$, soit $z = b - x$, la troisième donne $-x + t = c$, soit $t = c + x$. La dernière donne ensuite $x - y - z = d$, soit $y = x - z - d = 2x - b - d$, et enfin la première devient $-x + 3y - t = a$, soit $-x + 6x - 3b - 3d - c - x = a$, donc $4x = a + 3b + c + 3d$, et $x = \dfrac{a + 3b + c + 3d}{4}$. Ensuite, $y = \dfrac{a + b + c + d}{2}$; $z = \dfrac{-a + b - c - 3d}{4}$ et $t = \dfrac{a + 3b + 5c + 3d}{4}$. La famille est bien génératrice, c'est une base.

7. On l'a déjà fait à la question précédente, les coordonnées sont $\left(\dfrac{a + 3b + c + 3d}{4}; \dfrac{a + b + c + d}{2}; \dfrac{-a + b - c - 3d}{4}; \dfrac{a + 3b + 5c + 3d}{4}\right)$.
8. Écrivons pour commencer les calculs dans $\mathbb{R}^4$: en reprenant les notations précédentes, $s(a, b, c, d) = x(-1, 1, -1, 1) - y(3, 0, 0, -1) - z(0, 1, 0, -1) - t(-1, 0, 1, 0) = (-x - 3y + t, x - z, -x - t, x + y + z) = \left(\dfrac{-3a - 3b - c - 3d}{2}; \dfrac{a + b + c + 3d}{2}; \dfrac{-a - 3b - 3c - 3d}{2}; \dfrac{a + 3b + c + d}{2}\right)$. Soit $s(A) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3a - 3b - c - 3d & a + b + c + 3d \\ -a - 3b - 3c - 3d & a + 3b + c + d \end{pmatrix}$
9. Hum, ça ne va pas être beau, faisons avec des vecteurs encore une fois, et sans fraction : $\dfrac{1}{4} s \circ s(a, b, c, d) = (-3(-3a - 3b - c - 3d) - 3(a + b + c + 3d) - (-a - 3b - 3c - 3d) - 3(a + 3b + c + d); (-3a - 3b - c - 3d) + (a + b + c + 3d) + (-a - 3b - 3c - 3d) + 3(a + 3b + c + d); -(-3a - 3b - c - 3d) - 3(a + b + c + 3d) - 3(-a - 3b - 3c - 3d) - 3(a + 3b + c + d); (-3a - 3b - c - 3d) + 3(a + b + c + 3d) + (-a - 3b - 3c - 3d) + (a + 3b + c + d)) = (4a; 4b; 4c; 4d)$. Eh oui, miracle, on retrouve bien que $s \circ s(a, b, c, d) = (a, b, c, d)$, autrement dit que $s \circ s = \mathrm{id}$, ce qui est normal pour une symétrie.

Problème

1. (a) Le trinôme $1 + x + x^2$ ayant un discriminant strictement négatif, il est positif sur $\mathbb{R}$. La seule valeur interdite est donc 0, à cause du $\dfrac{1}{x}$ dans l'exponentielle, et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$.

   (b) La fonction g est certainement dérivable sur son domaine de définition (ce qui est sous la racine ne s'annule jamais), et $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + x + x^2} + e^{\frac{1}{x}} \times \dfrac{2x + 1}{2\sqrt{1 + x + x^2}} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2\sqrt{1 + x + x^2}}(x^2(2x + 1) - 2(1 + x + x^2)) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2\sqrt{1 + x + x^2}}(2x^3 - x^2 - 2x - 2)$.

   (c) La dérivée g' est du signe de $h(x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 2$. On calcule $h'(x) = 6x^2 - 2x - 2 = 2(3x^2 - x - 1)$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 13$, et s'annule donc pour $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{6}$. Le tableau de variations de la fonction h ressemblera donc à ceci :

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline & & & h(x_1) & & & & +\infty \\ h & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ & -\infty & & & & h(x_2) & & \end{array}$$

   Pour déterminer le nombre de valeurs annulant h, il faut hélas être capable de donner le signe de $h(x_1)$. Utilisons le fait que $h'(x_1) = 0$, donc $3x_1^2 = x_1 + 1$, pour en déduire que $x_1^3 = \dfrac{x_1^2 + x_1}{3} = \dfrac{4}{9}x_1 + \dfrac{1}{9}$. On en déduit que $h(x_1) = 2x_1^3 - x_1^2 - 2x_1 - 2 = \dfrac{8}{9}x_1 + \dfrac{2}{9} - \dfrac{1}{3}x_1 - \dfrac{1}{3} -$

$2x_1-2=-\frac{13}{9}x_1-\frac{19}{9}$. Le nombre x_1 étant compris entre -1 et 0 (puisque $3<\sqrt{13}<4$), on en déduit que $h(x_1)<0$, ce qui suffit à conclure que h est strictement négative sur $]-\infty,x_2]$ (avec $h(x_2)<h(x_1)<0$). Elle est ensuite bijective de $[x_2,+\infty[$ sur $[h(x_2),+\infty[$ et s'annule une unique fois sur cet intervalle. De plus, $h(1)=2-1-2-2=-3<0$, et $h(2)=16-4-4-2=6>0$, ce qui assure que $1<\alpha<2$ par croissance de h sur $[x_2,+\infty[$ (le réel x_2 étant strictement inférieur à 1).

(d) Commençons par constater que $\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$, ce qui suffit à prouver que $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{1+x+x^2}=+\infty$. Ensuite, $\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x+x^2}=1$ (que ce soit à gauche ou à droite), donc $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$. De même, $\lim_{x\to 0^-} g(x)=0$ (cette fois-ci, ce qui se trouve dans l'exponentielle tend vers $-\infty$).

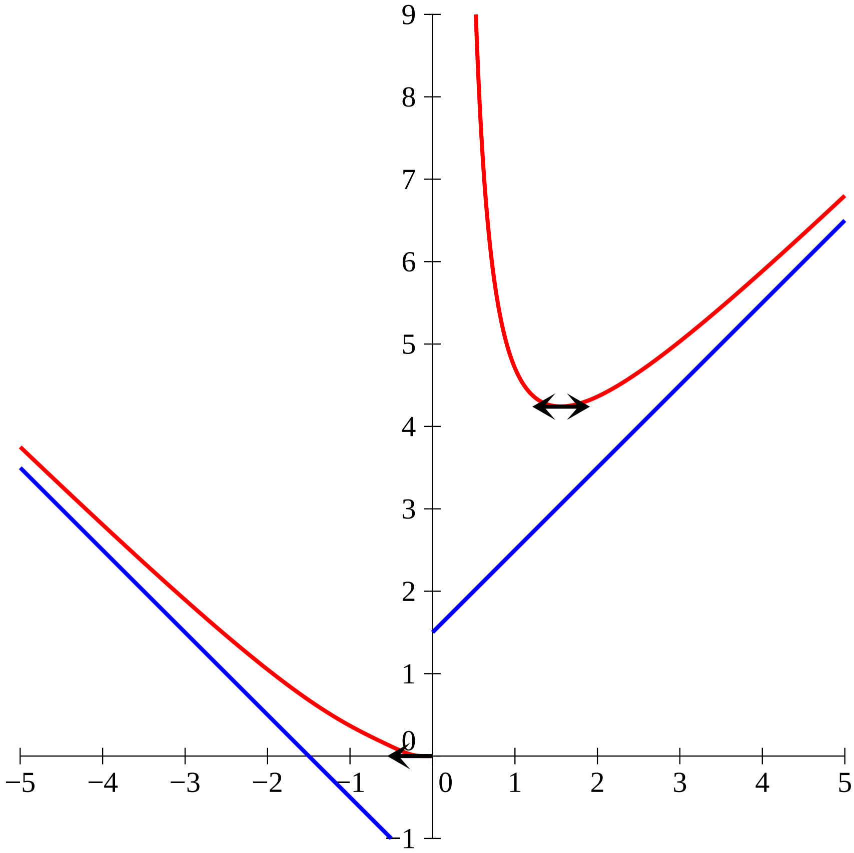
(e) La fonction est bien prolongeable à gauche en 0 en posant $g(0)=0$ d'après le calcul de limite précédant. De plus, le taux d'accroissement en 0 est alors donné par $\tau(x)=\frac{g(x)}{x}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\sqrt{1+x+x^2}$. La racine carrée tend toujours vers 1 en 0, et en posant $X=\frac{1}{x}$, $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=Xe^X$, avec X qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^-. Cette expression a une limite nulle par croissance comparée, ce qui prouve que g prolongée est dérivable à gauche en 0, avec une demi-tangente horizontale.

(f) On a déjà signalé que $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$, donc $g(x)\underset{x\to+\infty}{\sim} 1\times\sqrt{x^2}\sim x$.

(g) Commençons donc par écrire que $\frac{g(x)}{x}=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$, et effectuons un développement limité à l'ordre 3 (il faut multiplier par x à la fin) de cette expression quand $\frac{1}{x}$ tend vers 0 : $e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$, et $\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+o(u^3)$ (en posant $u=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$), soit $\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{4x^3}+\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)=1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}-\frac{3}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Il ne reste plus qu'à effectuer le produit pour obtenir $\frac{g(x)}{x}=1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}-\frac{3}{16x^3}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{8x^3}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x^3}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)=1+\frac{3}{2x}+\frac{11}{8x^2}+\frac{29}{48x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Finalement, on obtient $g(x)=x+\frac{3}{2}+\frac{11}{8x}+\frac{29}{48x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Cette expression suffit à prouver que la droite d'équation $y=x+\frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de g en $+\infty$, et comme $g(x)-x-\frac{3}{2}\sim\frac{11}{8x}$ qui est positif en $+\infty$, la courbe sera au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

(h) Puisque $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$, la même droite ne peut sûrement pas être asymptote ! Pourtant, tout le calcul de la question précédente reste valable à un petit détail près : quand $x<0$, $\sqrt{x^2}=-x$, c'est donc le développement asymptotique de $\frac{g(x)}{-x}$ en $-\infty$ qui est donnée par la formule ci-dessus. Autrement dit, il y a un simple changement de signe : la droite d'équation $y=-x-\frac{3}{2}$ sera asymptote à la courbe de g en $-\infty$.

(i) Seules des demi-droites sont représentées pour les deux asymptotes :



2. (a) Il suffit d'appliquer le théorème de la bijection sur chacun des deux intervalles $]0, \alpha]$ et $[\alpha, +\infty[$, en utilisant que $g(\alpha) < 5$, ce qui est donné dans l'énoncé.

   (b) Par définition, on a $g(u_n) < g(u_{n+1})$ et $g(v_n) < g(v_{n+1})$. En appliquant la décroissance de g sur $]0, \alpha]$ et sa croissance sur $[\alpha, +\infty[$, on en déduit que $u_n > u_{n+1}$ et $v_n < v_{n+1}$. La suite (u_n) est donc décroissante, et la suite (v_n) croissante. Comme (u_n) est de plus minorée, elle converge nécessairement vers un réel $l \geqslant 0$. Si on avait $l \neq 0$, par passage à la limite, on en déduirait que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(l)$, ce qui est impossible puisque $g(u_n) = n$, qui tend vers $+\infty$. On a donc nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. De même, si (v_n) était majorée, elle convergerait vers un réel $l \geqslant \alpha$, ce qui est impossible pour les mêmes raisons que (u_n). La suite n'est donc pas majorée, et elle diverge vers $+\infty$.

   (c) On va en fait partir de $\ln(g(u_n)) = \ln(n)$ (puisque $u_n > 0$, rien ne peut nous empêcher de prendre le ln). Constatons que $\ln(g(x)) = \ln(e^{\frac{1}{x}}) + \ln(\sqrt{1 + x + x^2}) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\ln(1 + x + x^2)$ pour obtenir $\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{2}\ln(1 + u_n + u_n^2) = \ln(n)$. Il suffit de tout multiplier par u_n pour obtenir l'égalité demandée. Comme on sait déjà que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on aura certainement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{2}\sqrt{1 + u_n + u_n^2} = 0$ (produit de deux termes de limite nulle), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n)u_n = 1$. Cela revient exactement à dire que $u_n \sim \dfrac{1}{\ln(n)}$.

   (d) Le plus simple est de reprendre notre égalité pour écrire $u_n - \dfrac{1}{\ln(n)} = \dfrac{u_n}{2\ln(n)}\ln(1+u_n+u_n^2)$ et de prendre un équivalent du membre de droite : $\dfrac{u_n}{2\ln(n)} \sim \dfrac{1}{2\ln^2(n)}$ d'après la question précédente, et comme $u_n + u_n^2$ a une limite nulle, $\ln(1 + u_n + u_n^2) \sim u_n + u_n^2 \sim u_n \sim \dfrac{1}{\ln(n)}$

(u_n^2 étant négligeable devant u_n), soit $u_n - \dfrac{1}{\ln(n)} \sim \dfrac{1}{2\ln^2(n)} \times \dfrac{1}{\ln(n)} \sim \dfrac{1}{2\ln^3(n)}$. On peut écrire ce résultat sous la forme $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)} + \dfrac{1}{2\ln^3(n)} + o\left(\dfrac{1}{\ln^3(n)}\right)$.

(e) Faisons cette fois-ci un développement limité : $\dfrac{u_n}{2\ln(n)} \ln(1+u_n+u_n^2) = \left(\dfrac{1}{2\ln^2(n)} + \dfrac{1}{4\ln^4(n)} + o\left(\dfrac{1}{\ln^4(n)}\right)\right)\left(\dfrac{1}{\ln(n)} + \dfrac{1}{2\ln^3(n)} + \dfrac{1}{\ln^2(n)} - \dfrac{1}{2\ln^2(n)} + \dfrac{1}{3\ln^3(n)} + o\left(\dfrac{1}{\ln^3(n)}\right)\right) = \dfrac{1}{2\ln^3(n)} + \dfrac{1}{4\ln^4(n)} + \dfrac{5}{12\ln^5(n)} + \dfrac{1}{4\ln^5(n)} + o\left(\dfrac{1}{\ln^5(n)}\right)$. On obtient donc encore mieux que demandé : $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)} + \dfrac{1}{2\ln^3(n)} + \dfrac{1}{4\ln^4(n)} + \dfrac{2}{3\ln^5(n)} + o\left(\dfrac{1}{\ln^5(n)}\right)$.

(f) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{v_n}} = 1$, donc $g(v_n) \sim \sqrt{1+v_n+v_n^2} \sim \sqrt{v_n^2} \sim v_n$. Comme $g(v_n) = n$, il en découle que $v_n \sim n$.

(g) Il suffit de sortir le v_n de la racine carrée et de tout passer de l'autre côté : $g(v_n) = v_n e^{\frac{1}{v_n}} \sqrt{1 + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}} = n$, donc $v_n = n e^{-\frac{1}{v_n}} \left(1 + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. On sait que $\dfrac{1}{v_n} \sim \dfrac{1}{n}$, soit $\dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on peut donc effectuer un développement limité à l'ordre 1 de tout ça : $e^{-\frac{1}{v_n}} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et $\left(1 + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. En effectuant le produit, $v_n = n \times \left(1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = n - \dfrac{3}{2} + o(1)$. Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - n = -\dfrac{3}{2}$.

(h) Vous l'aurez compris, il s'agit de reprendre les calculs précédents à l'ordre deux puis à l'ordre trois : $\dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{n - \frac{3}{2} + o(1)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1 - \frac{3}{2n} + o(\frac{1}{n})}\right) = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{3}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Profitons-en pour signaler en passant que $\dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{5}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ puisqu'un $\dfrac{1}{n^2}$ s'ajoute. On peut alors écrire $e^{-\frac{1}{v_n}} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{2n^2} + \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; et $\left(1 + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2}u + \dfrac{3}{8}u^2 + o(u^2) = 1 - \dfrac{1}{2n} - \dfrac{5}{4n^2} + \dfrac{3}{8n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} - \dfrac{7}{8n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (en ayant posé $u = \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}$). On obtient donc à l'aide d'un produit que $v_n = n\left(1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{7}{8n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = n - \dfrac{3}{2} - \dfrac{11}{8n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On constate avec un amusement certain que les coefficients nous rappellent ceux de la question 1.g avant de passer à la dernière étape.

On recommence tout ! D'abord $\dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1 - \frac{3}{2n} - \frac{11}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2})} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{3}{2n} + \dfrac{11}{8n^2} + \dfrac{9}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ $\dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n^2} + \dfrac{29}{8n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Au passage, $\dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n^2} + \dfrac{29}{8n^3} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{5}{2n^2} + \dfrac{53}{8n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Il ne reste plus qu'à enchaîner : $e^{-\frac{1}{v_n}} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{2n^2} - \dfrac{29}{8n^3} + \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{3}{2n^3} - \dfrac{1}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{55}{24n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. De plus en plus rigolo, $\left(1 + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2}u + \dfrac{3}{8}u^2 - \dfrac{5}{16}u^3 + o(u^3) = 1 - \dfrac{1}{2n} - \dfrac{5}{4n^2} - \dfrac{53}{16n^3} + \dfrac{3}{8n^2} + \dfrac{15}{8n^3} -$

$\dfrac{5}{16n^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)=1-\dfrac{1}{2n}-\dfrac{7}{8n^2}-\dfrac{7}{4n^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Allons, du courage, plus qu'un « petit » produit à faire : $v_n=n\left(1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{55}{24n^3}-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{2n^3}-\dfrac{7}{8n^2}+\dfrac{7}{8n^3}-\dfrac{7}{4n^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$, soit enfin $v_n=n-\dfrac{3}{2}-\dfrac{11}{8n}-\dfrac{8}{3n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ceux qui pensaient naïvement qu'on retrouverait du $\dfrac{29}{48}$ comme au 1.g ont perdu !

(i) Enfin une question facile ! Pâtes bolognaises au menu, ça devrait requinquer.