Devoir surveillé n°7

PTSI A et B Lycée Eiffel

8 avril 2014

Durée : 3H45. Calculatrices interdites.

Exercice 1

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2+1)P(1) + P$.

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Rappeler quelle est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et déterminer les images par φ de chacun de ses éléments. En déduire si l'application φ est injective, surjective ou bijective (interdiction de calculer le noyau de φ pour cette question).
3. Montrer que $\varphi^2 - 4\varphi + 3\,\mathrm{id} = 0$.
4. En déduire une expression de $\varphi^{-1}(P)$, d'abord en fonction de $\varphi(P)$, puis explicitement.
5. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $F = \ker(\varphi - \mathrm{id})$ et $G = \ker(\varphi - 3\,\mathrm{id})$ (aucun des deux ne doit être réduit à 0 !).
6. Montrer que la famille obtenue en regroupant les deux bases calculées à la question précédente est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et donner les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ dans cette base.
7. Montrer que $\varphi = p + 3q$, où p est le projecteur sur F parallèlement à G, et q le projecteur sur G parallèlement à F.

Exercice 2

On rappelle que, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, sa trace est définie par $\mathrm{Tr}(A) = a + d$. On considère ensuite l'application f définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = \mathrm{Tr}(A)B + CA$, où $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la dimension de $\ker(\mathrm{Tr})$, ainsi qu'une base de son noyau.
3. Montrer que f est une application linéaire.
4. Déterminer $f(B)$ et $f(C)$.
5. Calculer le noyau et l'image de f (on en donnera une base), et préciser leurs dimensions respectives.
6. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}\ (f)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Déterminer les coordonnées d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ obtenue en regroupant celles de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}\ (f)$.
8. En déduire l'expression explicite de la symétrie s par rapport à $\ker(f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\ (f)$.
9. Calculer $s \circ s$ à partir de l'expression obtenue à la question précédente, et vérifier la cohérence du résultat obtenu.

Problème

On s'intéresse dans tout cet exercice à la fonction $g : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x+x^2}$.

1. Étude de la fonction g.
   (a) Déterminer le domaine de définition de g.
   (b) Calculer la dérivée de g et prouver que $g'(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2\sqrt{1+x+x^2}}(2x^3 - x^2 - 2x - 2)$.
   (c) Sans chercher à résoudre d'équation du troisième degré, montrer que g' s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, en une valeur α vérifiant $1 < \alpha < 2$ (on pourra redériver un morceau de g').
   (d) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
   (e) La fonction g prolongée à gauche en 0 admet-elle une demi-tangente à gauche en 0 (si oui, déterminer sa pente) ?
   (f) Donner un équivalent simple de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (g) Effectuer un développement asymptotique de g à l'ordre $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ (on commencera par sortir un facteur x de la racine carrée). En déduire la présence d'une asymptote oblique dont on donnera l'équation, ainsi que la position relative de la courbe de g et de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
   (h) La même droite est-elle asymptote quand x tend vers $-\infty$? Sinon, que se passe-t-il de ce côté-là ?
   (i) Tracer une allure soignée de la courbe représentative de g. On donne $\alpha \simeq 1,55$ et $g(\alpha) \simeq 4,2$.
2. Un peu de suites implicites.
   (a) Justifier que, $\forall n \geqslant 5$, l'équation $g(x) = n$ admet deux solutions distinctes u_n et v_n sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $u_n < \alpha$ et $v_n > \alpha$.
   (b) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont monotones et prouver rigoureusement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
   (c) En partant de l'équation $g(u_n) = n$, montrer que $\ln(n)u_n = 1 + \dfrac{u_n}{2}\ln(1 + u_n + u_n^2)$. En déduire un équivalent simple de u_n.
   (d) Montrer que $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)} + \dfrac{1}{2\ln^3(n)} + o\left(\dfrac{1}{\ln^3(n)}\right)$ (attention à la rédaction !).
   (e) Utiliser l'expression précédente pour obtenir le terme suivant du développement asymptotique de la suite (u_n).
   (f) Donner un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$ (on oubliera pas que (v_n) tend elle-même vers $+\infty$, contrairement à (u_n)).
   (g) Montrer que $v_n = ne^{-\frac{1}{v_n}}\left(1 + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, et en déduire la limite de $v_n - n$ quand n tend vers $+\infty$.
   (h) Calculer un développement asymptotique de v_n sous la forme $v_n = n + a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (si vous vous êtes arrêtés un peu avant, donnez quand même vos calculs).
   (i) Aller manger à la cantine, les maths ça creuse !