Devoir commun de mathématiques : corrigé

PTSI A et B Lycée Eiffel

15 mars 2014

Exercice 1

1. Dans ce cas, $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$ et $t = -2$, donc $f(K) = (7, 5)$.
2. L'application n'est pas injective, il est facile de construire une autre matrice ayant la même image que K par f, par exemple $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Pour que l'application soit surjective, il faut vérifier que le système $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & 2z & & & = & a \\ x & + & y & & & - & t & = & b \end{array} \right.$ admet (au moins) une solution quel que soit le couple de réels (a, b). C'est effectivement le cas, une solution évidente étant par exemple $x = y = 0$, $z = \dfrac{a}{2}$ et $t = -b$. L'application f est donc surjective mais pas injective, elle n'est pas bijective.
3. Il s'agit cette fois de résoudre le système $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & 2z & & & = & 0 \\ x & + & y & & & - & t & = & 0 \end{array} \right.$. Ce système admet une infinité de solutions, qu'on peut par exemple décrire à l'aide des deux conditions $z = \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}x$ et $t = x + y$. Autrement dit, $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x & x + y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
4. La relation est évidemment réflexive, puisque $f(A) = f(A)$ est vérifié. Elle est tout aussi facilement symétrique (si $f(A) = f(B)$ alors $f(B) = f(A)$) et transitive (si $f(A) = f(B)$ et $f(B) = f(C)$ alors $f(A) = f(C)$), donc c'est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de la matrice I_2 est constituée de toutes les matrices ayant la même image que I_2 par f. Puisque $f(I_2) = (1, 0)$, nous avons un dernier système à résoudre : $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & 2z & & & = & 1 \\ x & + & y & & & - & t & = & 0 \end{array} \right.$. Il est très similaire au précédent : $z = \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ et $t = x + y$, donc la classe d'équivalence recherchée est $\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & x + y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 2

1. Puisque y ne s'annule pas sur I, le changement de fonction est pertinent, et z est dérivable sur I, avec $y(x) = \dfrac{1}{z(x)}$, donc $y'(x) = -\dfrac{z'(x)}{z(x)^2}$. En remplaçant dans l'équation (E), on obtient donc $\dfrac{x^2 z'(x)}{z(x)^2} + \dfrac{x}{z(x)} = \dfrac{1}{z(x)^2}$, soit en multipliant tout par $z(x)^2$ (qui ne s'annule jamais) : $x^2 z'(x) + xz(x) = 1$, qui est bien une équation différentielle linéaire du premier ordre.
2. Puisqu'on travaille sur $]1, +\infty[$, on peut normaliser l'équation pour obtenir $z'(x) + \dfrac{1}{x}z(x) = \dfrac{1}{x^2}$. L'équation homogène associée $z'(x) + \dfrac{1}{x}z(x) = 0$ a pour solutions les fonctions $z_h : x \mapsto Ke^{-\ln(x)} = \dfrac{K}{x}$. On peut appliquer la méthode de variation de la constante pour déterminer

une solution particulière : posons $z_p(x) = \dfrac{K(x)}{x}$, alors $z_p'(x) = \dfrac{xK'(x) - K(x)}{x^2}$, donc $z_p'(x) + \dfrac{1}{x} z_p(x) = \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow \dfrac{xK'(x) - K(x)}{x^2} + \dfrac{K(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$, soit $K'(x) = \dfrac{1}{x}$. On peut par exemple prendre $K(x) = \ln(x)$, ce qui donne $z_p(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Les solutions complètes de notre équation sont donc les fonctions $z : x \mapsto \dfrac{\ln(x) + K}{x}$. Pour retrouver les solutions de l'équation (E), il suffit de prendre les inverses des fonctions précédentes, à condition bien évidemment que ces dernières ne s'annulent pas. Ce ne sera le cas que si l'équation $\ln(x) = -K$ n'admet pas de solution sur $]1, +\infty[$, c'est-à-dire si $K \geqslant 0$. Finalement, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x) + K}$, avec $K \in \mathbb{R}_+$.

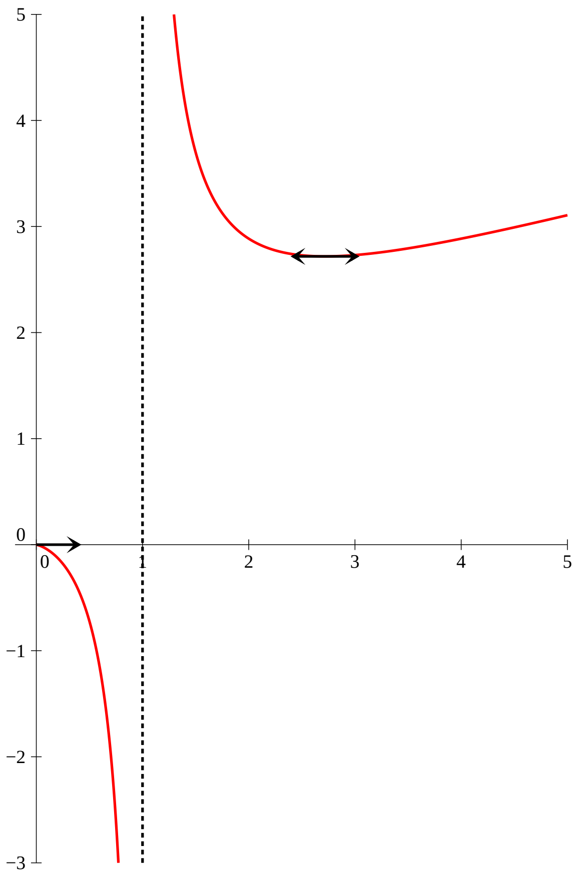
3. (a) Le quotient $\dfrac{x}{\ln(x)}$ est défini si $x > 0$ (à cause de la présence du logarithme) et si $\ln(x) \neq 0$, donc $\mathcal{D}_f = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ (la valeur 0 éyant été ajoutée par l'énoncé).

   (b) Puisque $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, on a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\ln(x)} = 0$ (pas de forme indéterminée ici), la fonction f est donc bien continue en 0. Le taux d'accroissement de f en 0 est donné par $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{\ln(x)}$. Ce quotient ayant une limite nulle quand x tend vers 0, la fonction f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$. Il y aura donc une tangente horizontale à la courbe représentative de f à l'origine du repère.

   (c) Calculons : $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$. Cette dérivée est du signe de $\ln(x) - 1$, et s'annule notamment lorsque $x = e$, f admet alors un minimum local de valeur $f(e) = e$. Les limites sont toutes faciles à calculer : puisque $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln(x) = 0^-$, on aura $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; de même, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$; enfin, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

   (d) Voici une allure de la courbe :



4. (a) C'est une récurrence très facile : $u_0 = 3 \geqslant e$, et en supposant $u_n \geqslant e$, la croissance de la fonction f sur l'intervalle $[e, +\infty[$ assure que $f(u_n) \geqslant f(e) = e$, donc $u_{n+1} \geqslant e$. Tous les termes de la suite sont donc effectivement supérieurs ou égaux à e.
   (b) Il faut ici déterminer le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle $[e, +\infty[$: $f(x) - x = \dfrac{x}{\ln(x)} - x = \dfrac{x(1 - \ln(x))}{\ln(x)}$. Si $x \geqslant e$, $1 - \ln(x) \leqslant 0$, donc $f(x) - x \leqslant 0$. On en déduit, puisque $u_n \geqslant e$, que $f(u_n) - u_n \leqslant 0$, soit $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.
   (c) La suite (u_n) étant décroissante et minorée par e, elle est nécessairement convergente. Sa limite ne peut être qu'un point fixe de la fonction f. Or, l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution le réel e (et 0 si on y tient, mais la suite ne peut sûrement pas converger vers 0). Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$.

Exercice 3

1. Puisqu'on nous le demande si gentiment, faisons donc une petite récurrence. Au rang 0, il s'agit de vérifier que $M^0 = I_2$, ce qui est vrai. Supposons désormais la propriété vérifiée au rang n, alors $M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n & b_n + 2a_n \\ 0 & 2b_n \end{pmatrix}$. Comme $2b_n = b_{n+1}$ et $2a_n + b_n = a_{n+1}$, la propriété est vraie au rang $n+1$ et, par principe de récurrence, pour tout entier naturel n.
2. La suite (b_n) étant par définition géométrique de raison 2 et de premier terme 1, on aura, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 2^n$, donc $a_{n+1} = 2a_n + b_n = 2a_n + 2^n$.
3. (a) Calculons $c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{2a_n + 2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{a_n}{2^n} + \dfrac{1}{2} = c_n + \dfrac{1}{2}$. La suite est bien arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$, et de premier terme $c_0 = \dfrac{a_0}{2^0} = 0$.

(b) Immédiatement, on trouve $c_n = \frac{n}{2}$, puis $a_n = 2^n c_n = n2^{n-1}$.

4. Il ne reste qu'à recopier : $M^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

5. Il suffit de partir de $a_{k+1} = 2a_k + 2^k$ (question 2), et de faire passer le 2^k et l'un des a_k à gauche pour trouver $a_{k+1} - a_k - 2^k = a_k$. Pour calculer la somme, sommons donc l'égalité précédente pour k variant entre 0 et n, on trouve alors $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k - 2^k$. Or, par télescopage, $\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_0 = (n+1)2^n$, et nos connaissances sur les sommes géométriques nous permettent de calculer $\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$, donc $\sum_{k=0}^{n} a_k = (n+1)2^n - 2^{n+1} + 1 = (n-1)2^n + 1$.

6. (a) Pour utiliser une méthode autre que le pivot de Gauss, on peut résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & a \\ -x & + & y & = & b \end{array} \right.$. La somme des deux équations donne directement $y = \frac{a+b}{2}$, la différence $x = \frac{a-b}{2}$. Autrement dit, la matrice P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   (b) Un calcul aussi palpitant que difficile donne $AP = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = M$. On prouve ensuite par récurrence la propriété $P_n : M^n == P^{-1}A^nP$. On vient de voir que P_1 était vraie, mais c'est également le cas pour $P_0 : P^{-1}A^0P = P^{-1}P = I_2 = M^0$. Supposons donc la propriété vraie au rang n, alors $M^{n+1} = M^n \times M = P^{-1}A^nP \times P^{-1}AP = P^{-1}A^nAP = P^{-1}A^{n+1}P$, ce qui prouve la propriété P_{n+1}. Par principe de récurrence, l'égalité est donc vraie pour tout entier n.

   (c) Si $P^{-1}A^nP = M^n$, alors $A^n = PM^nP^{-1}$ (en multipliant l'égalité à gauche par P et à droite par P^{-1}). Il reste donc un dernier calcul à faire : $PM^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} + 2^n \\ -2^n & 2^n - n2^{n-1} \end{pmatrix}$, puis $A^n = PM^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n + n2^{n-2} & n2^{n-2} \\ -n2^{n-2} & 2^n - n2^{n-2} \end{pmatrix}$

Exercice 4

1. (a) Il y a 7 dominos doubles et $\binom{7}{2} = 21$ dominos simples, soit au total 28 dominos.

   (b) Il y a donc $\binom{28}{2} = 378$ tirages possibles.

   (c) Il y a $\binom{7}{2} = 21$ tirages constitués de deux dominos doubles, et $7 \times 21 = 147$ d'un double et d'un simple.

   (d) Il y a 7 dominos faisant apparaitre le chiffre 1, donc 21 sans chiffre 1, soit $\binom{21}{2} = 210$ tirages convenables.

   (e) Soit on obtient le double 2 et un quelconque des 21 dominos ne faisant pas apparaitre le 2, soit on obtient deux dominos simples ayant un 2. Comme ces derniers sont au nombre de 6, il y a au total $21 + \binom{6}{2} = 26$ tirages convenables.

(f) Soit on tire un double et un simple contenant le chiffre du double (7 choix pour le double, et à chaque fois 6 simples convenables), soit deux simples contenant un même chiffre (sept possibilités pour le chiffre commun, $\binom{6}{2}$ choix de simples, sachant que les deux simples ne peuvent pas avoir deux chiffres en commun). Au total, $7 \times 6 + 7 \times 15 = 147$.

(g) Il faut distinguer plein de cas : soit on a $5+0+0+0$ (un seul cas) ; soit $4+1+0+0$ (deux cas, le double 0 et le $1-4$ ou le $0-1$ et le $0-4$) ; soit $3+2+0+0$ (encore deux cas) ; soit $3+1+1+0$ (deux cas) ; soit $2+2+1+0$ (deux cas) ; soit $2+1+1+1$ (un seul cas). Au total, 10 cas possibles.

2. (a) Il y a n dominos doubles, et $\binom{n}{2}$ dominos simples, soit $n+\dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ dominos.

(b) On a désormais des listes, il y a $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^3$ tirages possibles.

(c) Le nombre de tirages où on n'obtient pas de double est $\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^3$, donc par complémentaire le nombre cherché vaut $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^3 - \left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^3$.

(d) Soit on obtient le double zéro et deux autres dominos parmi les $\dfrac{n(n-1)}{2}$ n'ayant pas de zéro (il y en a n qui contiennent un zéro), soit deux simples contenant le zéro et un ne le contenant pas. Comme l'ordre est de plus important (il faut choisir dans le premier cas la position du double zéro, dans l'autre la position du domino sans zéro), le nombre de tirages vaut $3 \times \left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^2 + 3 \times n^2 \times \dfrac{n(n-1)}{2}$

3. (a) On obtient sans trop de problèmes $u_1 = 1$; $u_2 = 3$ (soit deux jaunes verticaux, soit rouge/vert horizontaux avec deux positions possibles) ; $u_3 = 5$ (un avec trois jaunes, quatre avec un jaune soit au début soit au bout) et $u_4 = 11$ (j'ai la flemme de faire des dessins, en plus je manque de couleurs : un avec quatre jaunes, quatre sans jaunes, et six avec deux jaunes qu'on peut placer à trois endroits).

(b) Considérons un mur de longueur $n+2$. Soit il s'achève avec un domino jaune, qui est alors précédé d'un mur de longueur $n+1$, pour lequel on a u_{n+1} constructions possibles. Soit il s'achève avec un binôme rouge/vert (deux possibilités) précédé cette fois d'un mur de longueur n pouvant être construit de u_n façons. Au total, on obtient bien $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

(c) La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - x - 2 = 0$. Celle-ci a pour discriminant 9 et admet pour racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$. On en déduit que $u_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$, où on a $u_1 = 2\alpha - \beta = 1$, et $u_2 = 4\alpha + \beta = 3$, donc en additionnant $6\alpha = 4$, soit $\alpha = \dfrac{2}{3}$, et $\beta = 2\alpha - 1 = \dfrac{1}{3}$. On a donc $u_n = \dfrac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$