Devoir commun de mathématiques

PTSI A et B Lycée Eiffel

15 mars 2014

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation de la copie seront pris en compte lors de la correction. En particulier, toute tentative de bluff ou résultat affirmé sans justification sera fortement sanctionné.

Exercice 1

Soif f l'application définie par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} & \mapsto & (x - y + 2z, x + y - t) \end{array} \right.$

1. Calculer l'image par f de la matrice $K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.
2. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
3. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(0, 0)$ par l'application f.
4. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$, $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow f(A) = f(B)$.
   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, et déterminer la classe d'équivalence de la matrice I_2.

Exercice 2

On note (E) l'équation différentielle $-x^2y'(x) + xy(x) = y^2(x)$. On recherche les fonction y solutions de cette équation sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$, et ne s'annulant pas sur I.

1. En posant $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$, déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par la fonction z.
2. Résoudre cette équation, et en déduire les solutions de l'équation (E).
3. On pose pour la fin de cet exercice $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$, prolongée en 0 posant $f(0) = 0$.
   (a) Donner le domaine de définition de la fonction f.
   (b) Montrer que f est continue en 0. La fonction est-elle dérivable en 0 ?
   (c) Calculer la dérivée f' de la fonction f, et étudier les variations de f. On dressera un tableau de variations complet de la fonction, en incluant toutes les limites (justifiées).
   (d) Tracer une allure soignée de la courbe représentative de f.
4. On définit désormais une suite (u_n) par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\ln(u_n)}$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant e$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
   (c) En déduire la convergence de la suite vers une limite à préciser.

Exercice 3

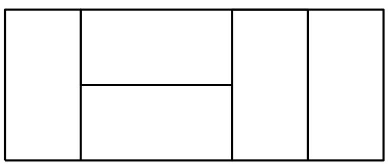
Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On considère également dans cet exercice les suites (a_n) et (b_n) définies par leur premier terme $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, et les relations de récurrence $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2b_n$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$.
3. On définit une suite auxiliaire (c_n) par $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$, pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que (c_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire une expression de c_n, puis de a_n, en fonction de n.
4. En déduire les quatre coefficients de la matrice M^n, pour un entier naturel n quelconque.
5. Montrer que $a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.
6. On considère désormais les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est une matrice inversible et calculer P^{-1} à l'aide de la méthode de votre choix.
   (b) Calculer $P^{-1}AP$, puis prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = M^n$.
   (c) En déduire les quatre coefficients de la matrice A^n.

Exercice 4

Un domino traditionnel est un rectangle séparé en deux carrés sur lesquels sont inscrits deux chiffres compris entre 0 et 6. Pour tout cet exercice, le terme « domino double » désignera un domino dont les deux carrés contiennent le même chiffre et « domino simple » un domino sur lequel sont inscrits deux nombres distincts.

1. Dans un premier temps, on tire simultanément deux dominos dans une boîte contenant un exemple de chaque domino traditionnel (l'ordre des deux carrés sur un domino n'est pas important, il n'y a donc qu'un seul domino $4-5$ par exemple).
   (a) Déterminer le nombre de dominos que contient la boite. Combien parmi eux sont des dominos simples ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages possibles au total ?
   (c) Combien de tirages constitués de deux dominos doubles ? D'un double et d'un simple ?
   (d) Combien de tirages pour lesquels le chiffre 1 n'apparait sur aucun des deux dominos ?
   (e) Combien de tirages pour lesquels on obtient deux chiffres 2 au total sur les deux dominos tirés ?
   (f) Combien de tirages pour lesquels les deux dominos ont (au moins) un chiffre en commun ?
   (g) Combien de tirages pour lesquels la somme des quatre chiffres tirés vaut 5 ?
2. On suppose désormais que les dominos peuvent avoir sur leurs faces des nombres compris entre 0 et $n-1$ (et non plus 0 et 6 comme auparavant), pour un entier $n \geqslant 2$. Comme précédemment, on place un exemplaire de chaque domino dans une boite, et on en tire cette fois-ci trois successivement avec remise.
   (a) Montrer que le nombre de dominos est désormais égal à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
   (b) Déterminer le nombre total de tirages possibles.
   (c) Combien de tirages pour lesquels obtient au moins un double ?
   (d) Combien de tirages pour lesquels on obtient deux fois exactement le chiffre 0 ?
3. On dispose désormais de dominos jaunes, rouges et verts en nombre aussi grand que nécessaire. On veut construire un mur de dominos de hauteur 2 et de longueur n à l'aide de ces dominos (cf schéma pour un exemple de mur de hauteur 2 et de longueur 5). Un domino vertical sera nécessairement jaune, mais quand on pose deux dominos horizontaux, on a le choix entre mettre un vert au-dessus et un rouge en-dessous, ou le contraire. On note u_n le nombre de murs de longueur n distincts possibles.



   (a) En faisant la liste des cas possibles, déterminer la valeur de u_1, u_2, u_3 et u_4.
   (b) Prouver par un raisonnement combinatoire que, $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}$.
   (c) En déduire la valeur de u_n en fonction de n.