Devoir Surveillé n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

1er février 2014

Exercice 1

1. La fonction f_n est certainement dérivable sur $[0,1]$, de dérivée $f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$. Cette dérivée est négative sur $[0,1]$, la fonction f_n y est donc décroissante. De plus, $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 1 + 1 - n = 2 - n \leq 0$, donc f_n est bijective de $[0,1]$ sur $[2-n, 1]$. Comme 0 appartient à l'intervalle image, l'équation $f_n(x) = 0$ admet bien une unique solution.
2. Il suffit de calculer $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n} + 1 - 1 = \frac{1}{n^n} > 0$, et $f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2^n}{n^n} - 1 \leq 0$ (puisque $n \geq 2$, donc $\frac{2^n}{n^n} \leq 1$), et d'appliquer la décroissance de la fonction f_n pour obtenir l'encadrement souhaité. Une simple application du théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que (u_n) converge vers 0.
3. Calculons donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 1 - (n+1)x - x^n - 1 + nx = x^{n+1} - x^n - x = x^n(x-1) - x \leq 0$ puisque $x - 1 \leq 0$. On en déduit notamment que $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \leq 0$, c'est-à-dire que $f_{n+1}(u_n) \leq 0$ puisque $f_n(u_n) = 0$. En particulier, $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$. La fonction f_{n+1} étant décroissante, $u_n \geq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc décroissante.
4. On sait que $u_n^n + 1 - nu_n = 0$. D'après la question précédente, $\forall n \geq 3$, $u_n \leq u_3 < 1$ (attention au fait que $u_2 = 1$), donc $0 \leq u_n^n \leq u_3^n$, ce qui suffit à assurer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = 0$ d'après le theorème des gendarmes (le majorant étant une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1, il tend vers 0). On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - nu_n = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = 1$.

Exercice 2

1. (a) La fonction est définie lorsque $\frac{x+1}{x-1} > 0$, c'est-à-dire sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

   (b) Le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0, et $f(-x) = (x^2-1)\ln\left(\frac{1-x}{-x-1}\right) = (x^2-1)\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x)$ puisque $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$. La fonction est donc impaire, ce qui permet de restreindre l'étude à $]1, +\infty[$ et de compléter la courbe par symétrie par rapport à l'origine du repère.

   (c) Lorsque $x \neq 1$, on peut écrire $f(x) = (x^2-1)\ln(x+1) - (x^2-1)\ln(x-1)$. La première moitié a clairement pour limite 0 quand x tend vers 1, pour la deuxième on peut écrire $(x^2-1)\ln(x-1) = (x+1)(x-1)\ln(x-1) = (X+2)X\ln(X)$ en posant $X = x - 1$. Comme $\lim\limits_{x \to 1} X = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} X\ln(X) = 0$ (croissance comparée), on trouve à nouveau une limite nulle. On peut donc bien prolonger par continuité en posant $f(1) = 0$.

   (d) On calcule donc $\tau_1(h) = \frac{f(h)}{h-1} = (h+1)\ln\left(\frac{h+1}{h-1}\right)$. Il n'y a plus de forme indéterminée : ce qui se trouve dans le ln tend vers $+\infty$ et on le multiplie par un facteur qui tend vers 1, donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_1(h) = +\infty$. La courbe admettra donc en 1 une tangente verticale.

2. (a) La fonction h est dérivable, et $h'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2}$ (séparer les deux ln rend le calcul plus facile), soit $h'(x) = \dfrac{x^2(x-1) - x^2(x+1) + (x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \dfrac{x^3 - x^2 - x^3 - x^2 + x^2 - 1}{x^2(x-1)} = \dfrac{-x^2-1}{x^2(x-1)}$, qui est négatif sur $]1, +\infty[$. La fonction h est donc strictement décroissante. En utilisant le quotient des termes de plus haut degré, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$. La fonction h est donc toujours positive.

(b) Calculons donc (en reprenant partiellement le calcul de h') : $f'(x) = 2x \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + (x^2-1)\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}\right) = 2x \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - 2 = 2xh(x)$. D'après la question précédente, $f'(x)$ est toujours positive sur $]1, +\infty[$, et f y est donc croissante. En utilisant la limite de la question suivante, on a donc le tableau de variations suivant :

x	1		$+\infty$
			$+\infty$
		$\nearrow$	
f	0		

(c) En effet, $1 + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{x-1+2}{x-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$. Posons donc $X = \dfrac{2}{x-1}$, qui a le bon goût de tendre vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On constate alors que $(x-1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \dfrac{2}{X}\ln(1+X)$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \dfrac{1}{2}$ (limite classique). En multipliant par $x+1$ pour obtenir $f(x)$, on trouve donc aisément $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Pour f', un petit peu de bidouillage supplémentaire : $f'(x) = \dfrac{2x}{x-1} \times (x-1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - 2$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x-1} = 2$, le premier terme a pour limite 4 d'après ce qui précède, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 4 - 2 = 2$.

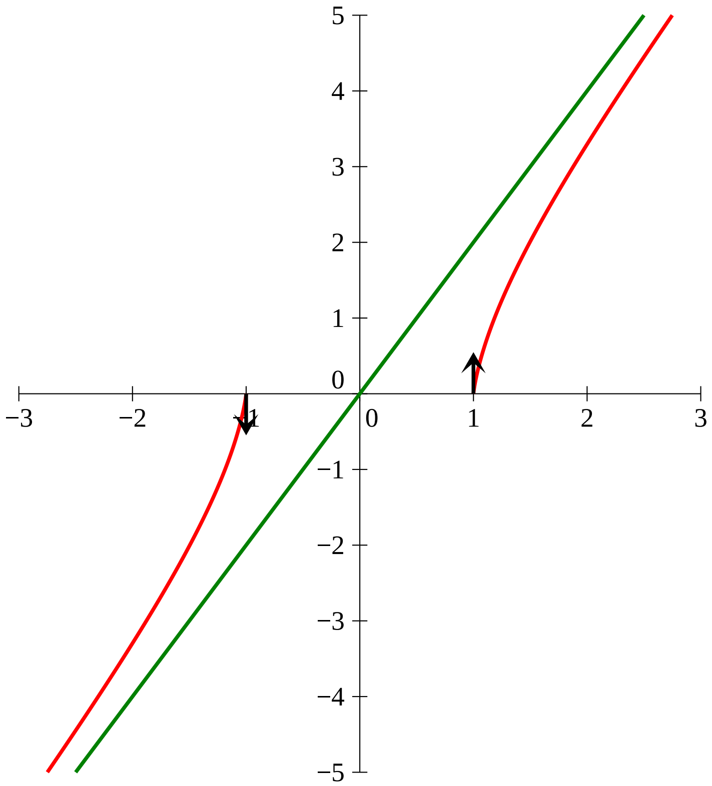
3. (a) Calculons donc $g'(x) = f'(x) - 2 = 2x \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - 4$, puis $g''(x) = 2\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + 2x\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}\right) = 2\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - \dfrac{4x}{x^2-1}$.

(b) Posons donc $z(u) = \ln(1+u) - \dfrac{u^2+2u}{2u+2}$, la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $z'(u) = \dfrac{1}{1+u} - \dfrac{(2u+2)^2 - 2(u^2+2u)}{4(1+u)^2} = \dfrac{1}{1+u} - \dfrac{u^2+2u+2}{2(1+u)^2} = \dfrac{-u^2}{2(1+u)^2} < 0$. La fonction z est donc décroissante. Puisque $z(0) = 0$, la fonction z est toujours négative, ce qui prouve l'inégalité souhaitée. Posons maintenant $u = \dfrac{2}{x-1}$, alors $\dfrac{u(u+2)}{2(u+1)} = \dfrac{\frac{2}{x-1} \times \frac{2+2x-2}{x-1}}{\frac{2(2+x-1)}{x-1}} = \dfrac{4x}{2(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x}{x^2-1}$. Comme $\dfrac{2}{x-1} > 0$ lorsque $x \geq 1$, la négativité de la fonction z prouve que $\forall x > 1$, $\ln\left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right) - \dfrac{2x}{x^2-1} < 0$. on reconnait, à un facteur 2 près, la dérivée seconde g'' de la fonction g, qui est donc bien négative sur $]1, +\infty[$.

(c) La fonction g' est donc décroissante. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = 0$ puisque $g'(x) = f'(x) - 2$, donc la fonction g' est toujours positive, et g est croissante. Puisqu'on a admis que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$, la fonction g ne prend que des valeurs négatives. Autrement dit, la courbe représentative de la fonction f est toujours située sous la droite (D) d'équation $y = 2x$.

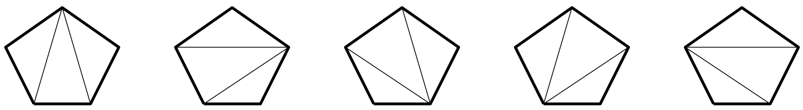
(d) On peut évidemment utiliser l'imparité de la fonction pour tracer l'allure sur tout le domaine de définition de f :



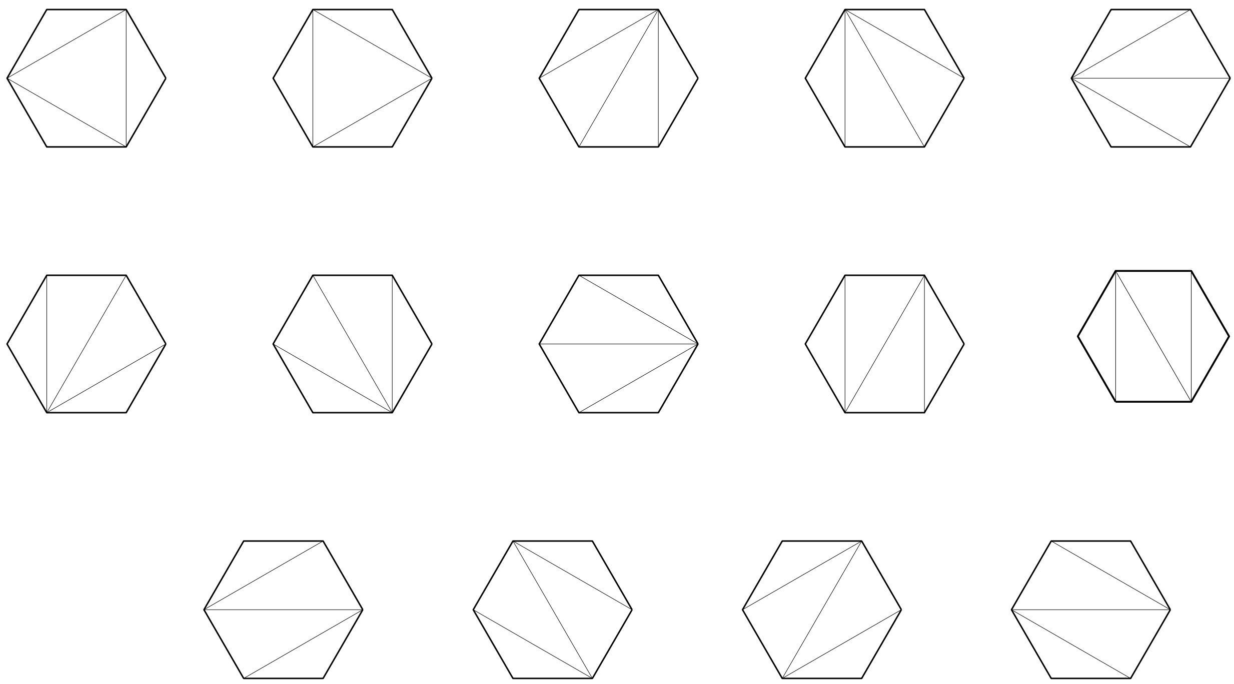
Problème

I. Triangulations de polygônes.

1. Il n'y a qu'une seule façon de trianguler un triangle, c'est de ne rien faire ! On en déduit que $t_1 = 1$. Pour un carré, deux possibilités, on peut le découper suivant l'une ou l'autre des deux diagonales, ce qui donne $t_2 = 2$. Pour les pentagones, autant faire une jolie petite liste de dessins, il doit y en avoir cinq :



2. Eh bien voila, en tentant de trier dans un ordre plus ou moins logique :



3. Une fois le triangle $A_1A_iA_{n+3}$ imposé, il reste à découper en triangles les deux polygones qui sont de part et d'autre de ce triangle. Le premier a pour sommets A_1, A_2, ..., A_i, soit i sommets, donc peut être triangulé de t_{i-2} façons. Le deuxième a pour sommets A_i, A_{i+1}, ..., A_{n+3}, soit $(n+3)-i+1=n-i+4$ sommets, donc peut être triangulé de t_{n+2-i} façons. Les deux triangulations se faisant indépendamment l'une de l'autre, il y a au total $t_{i-2}t_{n-(i-2)}$ triangulations de notre polygone initial contenant le triangle $A_1A_iA_{n+3}$.
4. Il y a par définition t_{n+1} triangulations pour le polygone considéré à $n+3$ sommets. Chacune de ces triangulations contient exactement un triangle du type $A_1A_iA_{n+3}$, avec $i \in 2,\dots,n+2$ donc il suffit pour obtenir le nombre total de triangulations du polygone d'additionner les nombres obtenus à la question précédente pour toutes les valeurs possibles de i. Autrement dit, $t_{n+1} = \sum_{i=2}^{i=n+2} c_{i-2}c_{n-(i-2)}$. Un petit décalage d'indice ramène à la formule nettement plus lisible $t_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} t_it_{n-i}$.
5. On calcule successivement $t_1 = t_0 = 1$, puis $t_2 = t_0t_1 + t_1t_0 = 1+1 = 2$; $t_3 = t_0t_2 + t_1^2 + t_2t_0 = 2\times 2+1 = 5$; $t_4 = 2t_0t_3 + 2t_1t_2 = 2\times 5 + 2\times 2 = 14$. Jusque là on retrouve bien les valeurs constatées. Continuons donc : $t_5 = 2t_0t_4 + 2t_1t_3 + t_2^2 = 2\times 14 + 2\times 5 + 2^2 = 42$; et $t_6 = 2t_0t_5 + 2t_1t_4 + 2t_2t_3 = 2\times 42 + 2\times 14 + 2\times 5\times 2 = 132$.

II. Une formule explicite.

On note dans cette section $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ (pour tout entier naturel n).

1. Calculons donc : $c_0 = \dfrac{1}{1}\times\dbinom{0}{0} = 1$; $c_1 = \dfrac{1}{2}\times\dbinom{2}{1} = 1$; $c_2 = \dfrac{1}{3}\times\dbinom{4}{2} = 2$; et $c_3 = \dfrac{1}{4}\times\dbinom{6}{3} = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{6\times 5\times 4}{6} = 5$.
2. Cette question est placée à un endroit curieux dans le problème, puisqu'on ne peut pas déduire facilement des éléments qu'on a pour l'instant le fait que c_n est un entier. En effet, d'après la

définition, $c_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$, mais cela ne permet pas de conclure puisque le fait que $\dbinom{2n}{n}$ soit divible par $n+1$ n'a rien de trivial. Même la relation démontrée à la question suivante ne suffit pas à prouver le résultat par récurrence. Il faut attendre les relations de la question 4, et plus précisément la forme du milieu de cette question, pour voir de façon évidente que $c_n \in \mathbb{N}$.

3. C'est un simple calcul : $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{n+1}{n+2} \dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \times \dfrac{n!^2}{(2n)!} = \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \dfrac{n!^2}{(n+1)!^2} = \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} = \dfrac{4n+2}{n+2}$.

4. Encore du calcul sans grand intérêt : $\dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n+1} = \dfrac{(2n)!}{n(n+1)!(n-1)!} = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} = c_n$; $\dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1} = \dfrac{(2n)!}{n!n!} - \dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \dfrac{(2n)!(n+1) - (2n)!n}{(n+1)!n!} = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} = c_n$; et enfin $\dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n-1}{n} = \dfrac{2(2n-1)!}{(n+1)n!(n-1)!} = \dfrac{2n(2n-1)!}{(n+1)!n(n-1)!} = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!} = c_n$.

5. (a) Commençons par l'inégalité de gauche : en élevant le tout au carré et en utilisant le calcul de la question 3, il faut donc prouver que $\dfrac{16n^3}{(n+1)^3} \leq \dfrac{4(2n+1)^2}{(n+2)^2}$, soit encore $4n^3(n+2)^2 \leq (2n+1)^2(n+1)^3$. On passe tout à droite et on fait la différence : $(4n^2 + 4n+1)(n^3+3n^2+3n+1) - 4n^3(n^2+4n+4) = 4n^5 + 16n^4 + 25n^3 + 19n^2 + 7n + 1 - 4n^5 - 16n^4 - 16n^3 = 9n^3 + 19n^2 + 7n + 1$ qui est clairement positif, ce qui prouve l'inégalité de gauche. Passons à celle de droite, qui se ramène plus simplement à $\dfrac{4(2n+1)^2}{(n+2)^2} \leq \dfrac{16(n+1)^3}{(n+2)^3}$, soit $(2n+1)^2(n+2) \leq 4(n+1)^3$. On met une fois de plus tout à droite : $4(n+1)^3 - (4n^2+4n+1)(n+2) = 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4 - 4n^3 - 12n^2 - 9n - 2 = 3n+2 > 0$, ce qui prouve la deuxième partie de l'encadrement.

   (b) Tous les nombres présents dans l'encadrement précédent sont positifs, on peut les multiplier entre eux sans difficulté, faisons-le lorsque k varie entre 1 et $n-1$ pour obtenir $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} 4\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq \prod_{k=1}^{n-1} 4\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{\frac{3}{2}}$. Le terme du milieu se télescope pour donner $\dfrac{c_{n-1+1}}{c_1} = c_n$. Dans celui de gauche, les facteurs 4 donnent un 4^{n-1} puisqu'il y a $n-1$ termes dans le produit, et les puissances $\dfrac{3}{2}$ se telescopent pour laisser $\dfrac{1^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, ce qui prouve exactement l'inégalité de gauche. À droite, on aura également un 4^{n-1}, et les puissances donnent $\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$. Or, $(n+1)^{\frac{3}{2}} \geq n\sqrt{n}$, et $2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} \leq 3$, donc $\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \dfrac{3}{n\sqrt{n}}$, ce qui permet de conclure à l'encadrement souhaité.

6. (a) Utilisons donc l'indice généreusement donné par l'énoncé : en posant $i = n-k$, on obtient $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} kc_kc_{n-k} = \sum_{i=0}^{i=n}(n-i)c_{n-i}c_i = \sum_{i=0}^{i=n} nc_ic_{n-i} - \sum_{i=0}^{i=n} ic_ic_{n-i} = nS_n - T_n$. On a donc $T_n = nS_n - T_n$, soit $2T_n = S_n$ et donc $T_n = \dfrac{n}{2}S_n$.

   (b) Partons plutôt du membre de droite, et utilisons le résultat de la question 3 en l'écrivant sous la forme $(4k+2)c_k = (k+2)c_{k+1}$: $4T_n + 3S_n = 4\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} kc_kc_{n-k} + 3\sum_{k=0}^{k=n} c_kc_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n}(4k+3)c_kc_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n}(4k+2)c_kc_{n-k} + \sum_{k=0}^{k=n} c_kc_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n}(k+2)c_{k+1}c_{n-k} + S_n$. Faisons maintenant un petit changement d'indice en posant $i = k+1$ dans la première somme, et on a $4T_n + 3S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n+1} (i+1)c_ic_{n+1-i} + S_n = \sum_{i=0}^{i=n+1} (i+1)c_ic_{n+1-i} - c_0c_{n+1} + S_n$. Or, $c_0 = 1$, donc $c_0c_{n+1} = c_{n+1}$ qui, par hypothèse est égal à S_n. Il nous reste donc $4T_n + 3S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n+1} (i+1)c_ic_{n+1-i} = \sum_{i=0}^{i=n+1} ic_ic_{n+1-i} + \sum_{i=0}^{i=n+1} c_ic_{n+1-i} = T_{n+1} + S_{n+1}$, et la formule est démontrée.

(c) Au rang 0, le résultat est vrai : $S_0 = 1 = c_1$. Supposant maintenant le résultat vrai au rang n, et combinons les résultats des questions a et b pour trouver $\dfrac{n+1}{2}S_{n+1} + S_{n+1} = 4 \times \dfrac{n}{2}S_n + 3S_n$, soit (en multipliant tout par 2) $(n+3)S_{n+1} = (4n+6)S_n$. Autrement dit, en utilisant notre hypothèse de récurrence, $S_{n+1} = \dfrac{4n+6}{n+3}c_{n+1}$. Or, on sait en appliquant le résultat de la question 3 pour $k = n+1$ que $\dfrac{c_{n+2}}{c_{n+1}} = \dfrac{4(n+1)+2}{n+1+2} = \dfrac{4n+6}{n+3}$. On en déduit que $S_{n+1} = c_{n+2}$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et achève la récurrence.

(d) On peut encore une fois procéder par récurrence, mais il faut faire une récurrence forte. Au rang 0, on sait que $t_0 = c_0 = 1$. Supposons donc les égalités vérifiées jusqu'à un certain entier n. On a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} c_kc_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} t_kt_{n-k}$, puisque les termes apparaissant dans les deux sommes sont les mêmes par hypothèse de récurrence. On en déduit que $t_{n+1} = c_{n+1}$, ce qui achève la récurrence.

III. Le retour du dénombrement.

1. (a) Assez clairement, $\delta_{n,0} = 1$ puisqu'on ne peut se rendre en un point situé sur l'axe des abscisses qu'en se déplaçant toujours vers la droite. Et $\delta_{n,m} = 0$ si $n > m$ puisque le point est situé au-dessus de Δ.

(b) Pour atteindre le point (n,n), le dernier déplacement effectué sera nécessairement un déplacement vers le haut (sinon, on viendrait d'un point qui n'est pas en-dessous de Δ), c'est-à-dire un déplacement venant compléter un début de chemin menant au point $(n, n-1)$. Réciproquement, tout chemin menant à $(n, n-1)$ se complète en un chemin menant à (n,n) en lui ajoutant un déplacement vers le haut. Il y a donc autant de chemins menant à $(n, n-1)$ que de chemins menant à (n,n), et $\delta_{n,n} = \delta_{n,n-1}$. Le principe est exactement le même pour la deuxième formule, mais en distinguant cette fois deux types de chemins : ceux pour lequel le dernier déplacement s'est effectué vers la droite (venant donc du point $(n-1, m)$) et ceux ayant un dernier déplacement vers le haut (venant de $(n, m-1)$). Les deux catégories de chemins formant des ensembles disjoints, l'égalité en découle (on considérera évidemment que $\delta_{n,m-1} = 0$ si $m = 0$).

(c) D'après la question précédente, $\delta_{n,1} = \delta_{n-1,1} + \delta_{n,0} = \delta_{n-1,1} + 1$. Autrement dit, la suite $(\delta_{n,1})$ est arithmétique de raison 1, et comme $\delta_{1,1} = 1$ (un seul chemin possible : un pas vers la droite puis un vers le haut), on trouve $\delta_{n,1} = n$. On procède de même pour le deuxième calcul : $\delta_{n,2} = \delta_{n-1,2} + \delta_{n,1} = \delta_{n-1,2} + n$. Là encore, il nous faut une initialisation : $\delta_{2,2} = \delta_{2,1} = 2$ en utilisant la première relation du b. On en déduit que $\delta_{n,2} = 2 + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} k = 2 + \frac{n(n+1)}{2} - 1 - 2 = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2+n-2}{2} = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$.

(d) Tout se calcule sans difficulté à l'aide des relations de la question b :

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	2				
$n=3$	1	3	5	5			
$n=4$	1	4	9	14	14		
$n=5$	1	5	14	28	42	42	
$n=6$	1	6	20	48	90	132	132

On remarque que les valeurs diagonales ressemblent vraiment étrangement aux premiers termes de la suite (c_n).

2. (a) Il faut quand même réussir à faire varier n et m simultanément. Au rang $n=0$, la seule valeur possible de m est 0, et $\dfrac{n-0+1}{n+1}\dbinom{n+0}{n} = 1 = \delta_{0,0}$ donc ça va. Supposons les formules vraies pour un certain entier n, pour toutes les valeurs de m inférieures ou égales à n, et tentons de les prouver au rang $n+1$. Pour cela, on va procéder par récurrence sur m, pour m variant entre 0 et $n+1$. Pour $m=0$, on a $\dfrac{n+1-0+1}{n+1+1}\dbinom{n+1+0}{n+1} = 1 = \delta_{n+1,0}$, la formule est correcte. Supposons maintenant la formule vérifiée pour $\delta_{n+1,m}$, alors $\delta_{n+1,m+1} = \delta_{n,m+1} + \delta_{n+1,m}$. On utilise simultanément les hypothèses de récurrence de la « grande » récurrence et de la « petite » récurrence pour remplacer :
$\delta_{n+1,m+1} = \dfrac{n-m}{n+1}\dbinom{n+1+m}{n} + \dfrac{n+2-m}{n+2}\dbinom{n+1+m}{n+1}$
$= \dfrac{(n-m)(n+m+1)!}{(n+1)n!(m+1)!} + \dfrac{(n+2-m)(n+m+1)!}{(n+2)(n+1)!m!}$
$= \dfrac{(n+m+1)!}{(n+1)!(m+1)!}\left(n-m+\dfrac{(n+2-m)(m+1)}{n+2}\right)$
$= \dfrac{(n+m+1)!}{(n+1)!(m+1)!} \times \dfrac{n^2+2n-nm-2m+nm+n+2m+2-m^2-m}{n+2}$
$= \dfrac{(n+m+1)!}{(n+1)!(m+1)!} \times \dfrac{n^2+3n-m^2-m+2}{n+2}$. On devrait obtenir pour achever la récurrence $\dfrac{n-m+1}{n+2}\dfrac{(n+m+2)!}{(n+1)!(m+1)!} = \dfrac{(n+m+1)!}{(n+1)!(m+1)!} \times \dfrac{(n-m+1)(n+m+2)}{n+2}$. Le numérateur de la deuxième fraction vaut $n^2+nm+2n-mn-m^2-2m+n+m+2 = n^2+3n-m^2-m+2$. Oh, miracle, ça marche !

   (b) Remplaçons donc m par n dans la formule obtenue :
$\delta_{n,n} = \dfrac{n-n+1}{n+1}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n} = c_n$.

3. (a) Un tel chemin commence forcément par un pas vers la droite et achève par un pas vers le haut. Entre deux, on effectue un déplacement du point $(1,0)$ au point $(n,n-1)$, le tout sans passer au-dessus de la droite d'équation $y=x-1$ puisqu'on ne veut pas croiser Δ. Quitte à décaler notre repère d'une unité vers la gauche, ces chemins sont les même que ceux menant de l'origine au point $(n-1,n-1)$ sans passer au-dessus de Δ, qui sont par définition en nombre égal à $\delta_{n-1,n-1} = c_{n-1}$.

   (b) Un tel chemin est composé de deux morceaux : un premier morceau menant de $(0,0)$ à (k,k) sans retoucher la diagonale (on vient de voir qu'il y en a c_{k-1}) puis un second menant de (k,k) vers (n,n) en restant simplement en-dessous de Δ mais en pouvant la croiser, ce qui est exactement équivalent à partir de l'origine et aller jusqu'à $(n-k,n-k)$ en restant en-dessous de Δ (on décale cette fois de k unités sur la diagonale). Il y a donc c_{n-k} chemins possibles pour la seconde moitié du parcours. Les choix des deux moitiés étant complètement indépendants, on a au total $c_{k-1}c_{n-k}$ possibilités.

(c) On peut partitionner l'ensemble des chemins selon leur premier point de rencontre avec Δ (en faisant une catégorie supplémentaire pour ceux qui ne recroisent pas Δ). On obtient bien tous les chemins ainsi, et comptés une seule fois chacun (puisque le premier point de contact avec Δ est certainement unique). La somme des nombres de chemins correspondants donnera alors $\delta_{n,n}$. Autrement dit, $\delta_{n,n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} c_{k-1}c_{n-k} + c_{n-1}$. Comme $c_0 = 1$, on peut écrire le terme isolé sous la forme c_0c_{n-1} et l'intégrer à la somme pour obtenir exactement la formule souhaitée.