Devoir Surveillé n°5

PTSI B Lycée Eiffel

1er février 2014

Exercice 1

Pour tout entier $n \geq 2$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Déterminer les variations de la fonction f_n, et montrer que l'équation $x^n + 1 = nx$ admet une unique solution dans $[0,1]$, que l'on notera désormais u_n.
2. Montrer que, $\forall n \geq 2$, $\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{2}{n}$. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, en déduire la monotonie de la suite (u_n).
4. En partant de l'égalité $f_n(u_n) = 0$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n$.

Exercice 2

On cherche à étudier dans cet exercice la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 1) \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

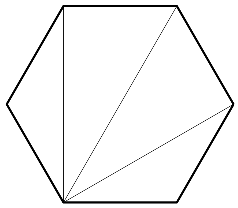
1. (a) Déterminer le domaine de définition de f (en justifiant).
   (b) Étudier la parité de la fonction f, en déduire qu'on peut restreindre l'étude de f à $]1, +\infty[$.
   (c) Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$. On notera toujours f la fonction prolongée pour tout le reste de l'exercice.
   (d) Donner l'expression du taux d'accroissement de f en 1, et en déduire si f est dérivable en 1, ou si elle y admet une tangente verticale.
2. On note h la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $h(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - \dfrac{1}{x}$.
   (a) Étudier les variations de h, et en déduire son signe.
   (b) Calculer $f'(x)$, étudier son signe à l'aide de la question précédente, puis dresser le tableau de variations de f sur $[1, +\infty[$.
   (c) Calculer les limites de f et de f' en $+\infty$. On pourra commencer par constater que $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right)$ et faire un changement de variable intelligent.
3. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0$, ou si vous préférez que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe représentative de f. On pose $g(x) = f(x) - 2x$.
   (a) Calculer g' et g'' (on reprendra bien sûr l'expression déjà calculée pour f' sans la justifier).
   (b) Montrer que, $\forall u > 0$, $\ln(1+u) \leq \dfrac{u(u+2)}{2(u+1)}$. En calculant le membre de droite de cette inégalité pour $u = \dfrac{2}{x-1}$, prouver que $g''(x) \leq 0$ sur $[1, +\infty[$.
   (c) En déduire le signe de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$. Comment interpréter graphiquement ce dernier résultat ?
   (d) Tracer une allure soignée de la courbe représentative de f, ainsi que de la droite (D) (dans le même repère, bien entendu).

Problème

Ce problème présente quelques dénombrements classiques faisant intervenir une suite de nombres entiers appelés nombres de Catalan, ainsi que l'étude de quelques propriétés de ces nombres. Les différentes parties du problème sont très largement indépendantes.

I. Triangulations de polygônes.

Trianguler un polygône à n côtés consiste à tracer un certain nombre de cordes dans le polygône (segments reliant deux sommets non adjacents du polygône), de façon à la découper en triangles (les cordes ne doivent donc pas se couper). Ci-dessous, un exemple de triangulation d'un hexagone :



On notera dans cette partie t_n le nombre de triangulations distinctes d'un polygône à $n+2$ côtés (en convenant que $t_0 = 1$).

1. Déterminer les valeurs de t_1, t_2 et t_3 (on pourra faire des petits dessins pour illustrer).
2. Vérifier que $t_4 = 14$ en dessinant les 13 triangulations d'un hexagone régulier distinctes de celle donnée en exemple plus haut.
3. Soient A_1, A_2, ..., A_{n+3} les sommets d'un polygône à $n+3$ côtés. Quel est le nombre de triangulations du polygône contenant le triangle $A_1 A_i A_{n+3}$ (pour $k \in \{2, \dots, n+2\}$) ? On exprimera le résultat en fonction des nombres t_i, pour des valeurs de i inférieures ou égales à n.
4. En déduire que, $\forall n \geq 1$, $t_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t_k t_{n-k}$.
5. Vérifier à l'aide de cette relation les valeurs des premiers termes de la suite (t_n), et calculer t_5 et t_6.

II. Une formule explicite.

On note dans cette section $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ (pour tout entier naturel n).

1. Calculer c_0, c_1, c_2 et c_3.
2. Expliquer pourquoi c_n est toujours un entier naturel.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} c_n$.
4. Prouver toutes les relations suivantes : $c_n = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n+1} = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1} = \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n-1}{n}$.
5. (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $4 \times \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} \leq \dfrac{c_{n+1}}{c_n} \leq 4\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

   (b) En déduire que $\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq 3 \times \dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

6. On note dans cette question $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} k c_k c_{n-k}$.

   (a) En effectuant le changement d'indice $i = n - k$, prouver que $T_n = \frac{n}{2} S_n$.

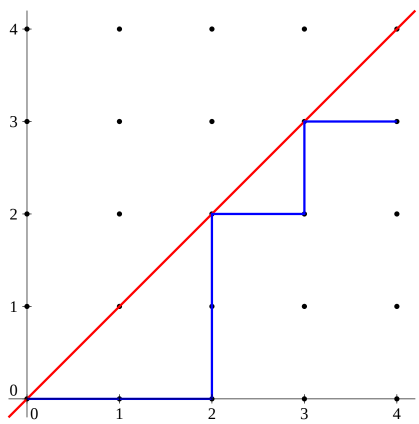
   (b) Montrer que $T_{n+1} + S_{n+1} = 4T_n + 3S_n$.

   (c) Prouver par récurrence, en utilisant les résultats des deux questions précédentes, que $S_n = c_{n+1}$.

   (d) En comparant les relations de récurrence obtenues sur les suites (c_n) et (t_n) (de la première partie du problème), prouver rigoureusement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

III. Le retour du dénombrement.

On considère dans cette partie des chemins menant dans le plan de l'origine du repère jusqu'au point de coordonnées (n, m), en respectant les conditions suivantes : à chaque pas, on se déplace d'une unité vers la droite, ou bien d'une unité vers le haut. On note Δ l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) situés sous la droite d'équation $y = x$ (c'est-à-dire tels que $x \leq y$), et on note $\delta_{n,m}$ le nombre de chemins menant de $(0, 0)$ à (n, m) et situés entièrement dans Δ (autrement dit, ne traversant pas la diagonale). Un exemple avec $(n, m) = (3, 4)$:



1. (a) Que vaut $\delta_{n,0}$ (pour tout entier n) ? Que vaut $\delta_{n,m}$ si $m > n$?

   (b) Justifier que $\delta_{n,n} = \delta_{n,n-1}$ (si $n \geq 1$) et $\delta_{n,m} = \delta_{n-1,m} + \delta_{n,m-1}$ si $m < n$.

   (c) En déduire la valeur de $\delta_{n,1}$ (pour $n \geq 1$) et de $\delta_{n,2}$ (pour $n \geq 2$).

   (d) Donner la liste des $\delta_{n,m}$ pour toutes les valeurs de n et de m inférieures ou égales à 6, en les présentant sous forme d'un tableau de type « triangle de Pascal ». Comparer les valeurs « diagonales » $\delta_{n,n}$ à celles de t_n et de c_n obtenues dans les deux premières parties du problème.

2. (a) Montrer par récurrence sur n que $\delta_{n,m} = \frac{n-m+1}{n+1}\binom{n+m}{n}$.

   (b) En déduire que $\delta_{n,n} = c_n$.

3. (a) Montrer que le nombre de chemins menant de $(0, 0)$ à (n, n) sans croiser la diagonale Δ (ailleurs qu'en $(0, 0)$ et en (n, n), bien évidemment) est égal à c_{n-1} (ou si vous préférez à $\delta_{n-1,n-1}$).

   (b) Montrer que le nombre de chemins menant de $(0, 0)$ à (n, n) en recoupant pour la première fois la diagonale en (k, k) est égal à $c_{k-1}c_{n-k}$.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\delta_{n,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k-1,k-1}\delta_{n-k,n-k}$.