

# Devoir Surveillé n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 janvier 2014

## Exercice 1 : matrices (avec très peu de suites)

1. Comme vous le savez, j'aime bien utiliser les résolutions de systèmes pour inverser rapidement les matrices. Considérons donc le système  $\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y = b \\ y + z = c \end{cases}$ . Il suffit de soustraire la dernière ligne à la première pour trouver  $x = a - c$ , puis la deuxième donne  $y = b - 2x = -2a + b + 2c$ , et la dernière  $z = c - y = 2a - b - c$ . Conclusion :  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .
  
2. (a) On calcule donc  $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ , puis  $A^3 = \begin{pmatrix} 23 & -12 & -3 \\ 6 & -4 & 6 \\ 24 & -12 & -4 \end{pmatrix}$ . Les coefficients en-dehors de la diagonale de  $A^3$  sont trois fois plus grands que ceux de  $A^2$ , et  $A^3 - 3A^2 = -4I_3$ , donc  $A^3 = 3A^2 - 4I^3$ .  
 (b) En reprenant les résultats de la question précédente,  $A(A^2 - 3A) = -4I_3$ , donc  $A \times \frac{3A - A^2}{4} = I_3$ . Ceci prouve que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \frac{3A - A^2}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -6 & 1 & 7 \\ -14 & 3 & 13 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .
  
3. (a) On trouve  $AP = PT = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .  
 (b) Une petite récurrence : c'est vrai au rang 0 puisque  $PT^0P^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$ , et en supposant la relation vraie au rang  $n$ , on aura  $A^{n+1} = A^n \times A = PT^nP^{-1}PTP^{-1}$  (puisque  $A = PTP^{-1}$  en multipliant par  $P^{-1}$  à droite l'égalité prouvée à la question précédente), donc  $A^{n+1} = PT^nTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$ , ce qui prouve l'hérédité de la propriété.  
 (c) Pour inverser  $T$ , deux toutes petites étapes de pivot de Gauss suffisent :

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On calcule alors  $PT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ , puis  $PT^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{4} & \frac{13}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ , ce qui correspond bien à la matrice obtenue pour  $A^{-1}$ .

4. On va bien évidemment procéder par récurrence. La propriété est certainement vraie au rang 0 en posant  $u_0 = 0$ . Supposons-là vérifiée au rang  $n$ , et calculons  $T^{n+1} = T^n \times T = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & u_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2^n + 2u_n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$ . La matrice  $T^{n+1}$  est donc bien de la forme souhaitée, en posant  $u_{n+1} = 2u_n + 2^n$  (on obtient la même relation en calculant  $T \times T^n$ ), ce qui achève la récurrence. Hélas, la suite  $(u_n)$  n'est pas d'un type connu, et son terme général n'est pas facile à calculer.

5. (a) Commençons par écrire que  $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , puis calculons  $B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  puis

$$B^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ On conjecture évidemment que, } \forall k \geq 2, B^k = \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-3)^{k-2}B^2, \text{ et on le prouve par une récurrence essentiellement triviale.}$$

- (b) Les matrices  $2I_3$  et  $B$  commutent certainement, donc  $T^n = (B+2I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (2I)^{n-k} =$

$$(2I)^n + n2^{n-1}B + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k = 2^n I + n2^{n-1}B + \sum_{k=2}^n k = 2^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-3)^{k-2} B^2 = 2^n I + n2^{n-1}B + \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-3)^{k-2} - \frac{2^n}{9} + \frac{n2^{n-1}}{3} \right) B^2 = 2^n I + n2^{n-1}B + \left( \frac{(-1)^n}{9} - \frac{2^n}{9} + \frac{n2^{n-1}}{3} \right) B^2. \text{ Écrivons la matrice explicitement, ce sera}$$

$$\text{utile pour la question suivante : } T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3n2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-1)^n - 2^n + 3n2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \text{ Autrement dit, } u_n = n2^{n-1}, \text{ et on vérifie que } 2u_n + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^n = u_{n+1}.$$

- (c) Un sublime calcul pour terminer :  $PT^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n & (n+2)2^{n-1} \\ 2(-1)^n & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & (n+2)2^{n-1} \end{pmatrix}, \text{ puis } A^n = PT^n P^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n & (n+2)2^{n-1} \\ 2(-1)^n & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & (n+2)2^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n + n2^n & -n2^{n-1} & (-1)^{n+1} + (2-n)2^{n-1} \\ 2(-1)^n + (n-2)2^n & (2-n)2^{n-1} & 2(-1)^{n+1} + (4-n)2^{n-1} \\ n2^n & -n2^{n-1} & (2-n)2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

6. (a) Soit donc une matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  quelconque dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , alors  $MT =$

$$\begin{pmatrix} -a & 2b & b+2c \\ -d & 2e & e+2f \\ -g & 2h & h+2i \end{pmatrix} \text{ et } TM = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}. \text{ Les deux matrices sont}$$

égales si  $-a = -a$  (ça, ça va);  $2b = -b$ , ce qui implique  $b = 0$ ;  $0 + 2c = -c$  qui donne  $c = 0$ ;  $-d = 2d + g$ ;  $2e = 2e + h$  qui implique  $h = 0$ ;  $e + 2f = 2f + i$  qui implique  $i = e$ ;  $-g = 2g$  qui implique  $g = 0$  puis  $d = 0$  en remontant au premier coefficient de la deuxième ligne;  $2h = 2h$  (encore une facile) et enfin  $h + 2i = 2i$ , donc  $h = 0$ . On obtient

$$\text{donc } M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

- (b) On sait que  $A = PTP^{-1}$ , ou si l'on préfère  $T = P^{-1}AP$ . Si  $MA = AM$ , on a donc  $MPTP^{-1} = PTP^{-1}M$ , puis  $P^{-1}MPTP^{-1} = TP^{-1}M$  et  $P^{-1}MPT = TP^{-1}MP$ , donc  $P^{-1}MP$  commute avec  $T$ . La réciproque consiste juste à faire les mêmes produits en ordre inverse.

- (c) Les matrices qui commutent avec  $T$  s'écrivent sous la forme  $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

+  $\gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (notons  $D_1, D_2$  et  $D_3$  les trois matrices apparaissant dans la formule

précédente). D'après la question précédente,  $M$  ne peut commuter avec  $A$  que si  $P^{-1}MP = \alpha D_1 + \beta D_2 + \gamma D_3$ , soit, par linéarité du produit matriciel,  $M = \alpha PD_1P^{-1} + \beta PD_2P^{-1} +$

$\gamma PD_3P^{-1}$ . Il ne reste donc plus qu'à calculer  $C_1 = PD_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ puis } C_2 = PD_2P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

et enfin  $C_3 = PD_3P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ . On

peut par exemple constater qu'on retrouve la matrice identité avec  $\alpha = 1, \beta = 1$  et  $\gamma = 0$ , ou la matrice  $A$  elle-même avec  $\alpha = -1, \beta = 2$  et  $\gamma = 1$ .

## Exercice 2 : suites (sans l'ombre d'une matrice)

- Calculons donc  $v_0 = \frac{7}{3}$ ;  $u_1 = \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{7}{3} \right) = \frac{8}{3}$ ;  $v_1 = \frac{21}{8}$ ;  $u_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{8}{3} + \frac{21}{8} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{64}{24} + \frac{63}{24} \right) = \frac{127}{48}$ ; et  $v_2 = \frac{336}{127}$ .
- C'est une récurrence triviale : en notant  $P_n : u_n$  et  $v_n$  sont strictement positifs,  $P_0$  est vraie, et  $P_n$  implique clairement  $P_{n+1}$  puisque la moyenne de deux nombres strictement positifs est strictement positive, et l'inverse d'un nombre strictement positif l'est également.
- Puisque  $v_n = \frac{7}{u_n}$ ,  $(u_n + v_n)^2 = \left( u_n + \frac{7}{u_n} \right)^2 = u_n^2 + 14 + \frac{49}{u_n^2}$ . De même,  $(u_n - v_n)^2 = u_n^2 - 14 + \frac{49}{u_n^2}$ , donc  $(u_n + v_n)^2 - (u_n - v_n)^2 = 14 + 14 = 28$ , donc découle la première égalité. En divisant cette relation par  $4u_{n+1} = 2(u_n + v_n)$ , on trouve alors  $\frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2 = \frac{(u_n + v_n)^2}{2(u_n + v_n)} - \frac{28}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{7}{\frac{u_n + v_n}{2}} = u_{n+1} - v_{n+1}$ . L'expression  $\frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$  étant positive (puisque  $u_{n+1} > 0$ ), on en déduit bien que  $u_{n+1} \geq v_{n+1}$ , ce qui prouve que  $u_n \geq v_n$  à partir du rang 1. C'est également vrai au rang 0 car  $\frac{7}{3} < 3$ , donc  $u_n \geq v_n$  pour tout entier naturel  $n$ .
- Comme  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$  d'après la question précédente,  $(u_n)$  est

décroissante. On peut en déduire immédiatement que  $v_n = \frac{7}{u_n}$  est le terme général d'une suite croissante (on peut aussi refaire un calcul).

5. (a) On a vu plus haut que  $v_1 = \frac{21}{8}$ . Or, d'après les résultats des questions précédentes,  $\forall n \geq 1$ ,  $u_n \geq v_n \geq v_1$ , donc  $u_n \geq \frac{21}{8}$ .
- (b) On reprend simplement le résultat de la question 3 :  $u_{n+1} \geq \frac{21}{8}$ , donc  $\frac{1}{4u_{n+1}} \leq \frac{8}{84} \leq \frac{1}{10}$ .
- (c) Puisqu'on nous le suggère si gentiment, prouvons par récurrence la propriété  $P_n : u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n-1}}$ . Au rang 0,  $\frac{1}{10^{2^0-1}} = \frac{1}{10^0} = 1$ , et  $u_0 - v_0 = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3} \leq 1$ , donc  $P_0$  est vérifiée. Supposons  $P_n$  vraie et exploitons la question précédente :  $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2 \leq \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{10^{2^n-1}}\right)^2 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10^{2^{n+1}-2}} = \frac{1}{10^{2^{n+1}-1}}$ . On a exactement prouvé  $P_{n+1}$  la propriété est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier  $n$ .
6. Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^{2^n-1}} = 0$ , le théorème des gendarmes permet d'affirmer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$  (la suite étant positive puisque  $u_n \geq v_n$ ). Comme de plus  $(u_n)$  est décroissante et  $(v_n)$  croissante, les deux suites sont bien adjacentes, et convergent donc vers une limite commune  $l$ . La relation  $v_n = \frac{7}{u_n}$  permet, par passage à la limite, d'obtenir  $l = \frac{7}{l}$ , soit  $l^2 = 7$  et  $l = \sqrt{7}$  (les suites étant à termes strictement positifs, leur limite ne peut pas être négative).
7. On aura toujours  $v_n \leq l \leq u_n$ , donc  $u_n$  (ou  $v_n$ ) est toujours une valeur approchée de  $\sqrt{7}$  avec une erreur majorée par  $u_n - v_n$ , qui est elle-même majorée par  $\frac{1}{10^{2^n-1}}$ . Il suffit de prendre  $n = 2$  pour obtenir  $\frac{1}{10^{2^2-1}} = 10^{-3}$ , donc  $\sqrt{7} \simeq u_2 \simeq \frac{127}{48}$  à  $10^{-3}$  près (par excès).

### Exercice 3 : suites (avec pas mal de matrices)

#### I. Approximations rationnelles du nombre d'or.

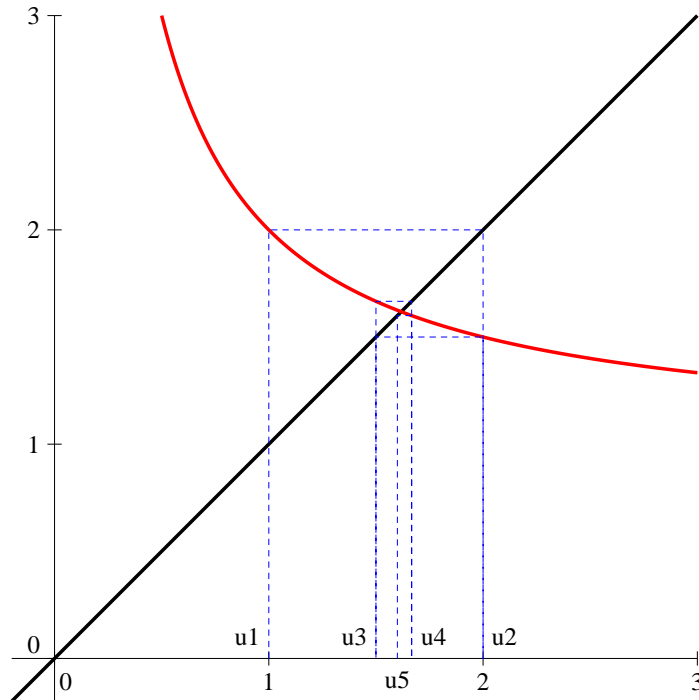
1. (a) Calculons donc  $\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\psi$ , ce qui prouve l'égalité demandée.
- (b) La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique  $x^2 - x - 1 = 0$ . Elle a pour discriminant  $\Delta = 1 + 4 = 5$ , et admet comme racines  $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$  et  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \psi$ . On peut donc écrire  $F_n = 1\varphi^n + B\psi^n$ . Les conditions initiales donnent  $F_0 = A + B = 0$ , donc  $B = -A$ , et  $F_1 = A\varphi + B\psi = 1$ , donc  $A = \frac{1}{\varphi - \psi} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . On obtient bien la formule annoncée pour  $F_n$ .
2. (a) Commençons par donner les premiers termes de la suite  $(F_n)$  :  $F_2 = 1$ ,  $F_3 = 2$ ,  $F_4 = 3$ ,  $F_5 = 5$  et  $F_6 = 8$ , donc  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 2$ ,  $u_3 = \frac{3}{2}$ ,  $u_4 = \frac{5}{3}$  et  $u_5 = \frac{8}{5}$ .
- (b) On calcule bien sûr  $u_{n+1} - u_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{1 + u_n - u_n^2}{u_n}$ . Le dénominateur est bien sûr positif (par une récurrence triviale, tous les termes de chacune des suites  $(F_n)$  et  $(u_n)$  sont strictement positifs), et le numérateur s'annule en  $\varphi$  et en  $\psi$  (c'est l'équation qu'on a résolue plus haut). Puisque  $u_n > 0$  et

$\psi < 0$ ,  $u_{n+1} - u_n$  sera positif à l'intérieur des racines du numérateur, donc si  $u_n \leq \varphi$ , et négatif sinon. En fait, on est capable de dire si  $u_n \leq \varphi$  en utilisant la formule explicite donnée à la question précédente :  $u_n = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n}$ . En effet,  $\psi$  étant négatif,  $\psi^n$  est alternativement positif et négatif, ce qui signifie que, si  $n$  est pair, le numérateur est inférieur à  $\varphi^{n+1}$ , et le dénominateur supérieur à  $\varphi^n$ , donc le quotient inférieur à  $\varphi$ . De la même façon, si  $n$  est impair,  $u_n \geq \varphi$ . On en déduit que  $u_{n+1} \geq u_n$  si  $n$  est impair, mais  $u_{n+1} \leq u_n$  si  $n$  est pair (ce qui est tout à fait cohérent avec les premières valeurs de la suite que nous avons calculées).

(c) Factorisons notre quotient par les puissances de  $\varphi$  :  $u_n = \frac{\varphi^{n+1}(1 - (\frac{\psi}{\varphi})^{n+1})}{\varphi^n(1 - (\frac{\psi}{\varphi})^n)} = \varphi \times$

$\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha^n}$ , en posant  $\alpha = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$ . Ce réel est certainement compris entre  $-1$  et  $1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = 0$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \varphi$ .

(d) On reprend pratiquement un calcul déjà fait :  $u_{n+1} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_n} = 1 + \frac{1}{u_n}$ . La fonction  $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , et coupe la droite d'équation  $y = x$  pour  $x = \varphi$  (c'est encore et toujours la même équation), ce qui permet de dessiner le bel escargot suivant pour représenter les termes de la suite  $(u_n)$  :



3. (a) D'après le calcul effectué pour déterminer la limite de  $(u_n)$ ,  $u_n - \varphi = \varphi \left( \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha^n} - 1 \right) = \varphi \times \frac{\alpha^n(\alpha - 1)}{1 - \alpha^n}$ . Or,  $\frac{\alpha^n}{1 - \alpha^n} = \frac{\psi^n}{\varphi^n} \times \frac{\varphi^n}{\varphi^n - \psi^n} = \frac{\psi^n}{\sqrt{5}F_n}$ ; et  $\alpha - 1 = \frac{\psi - \varphi}{\varphi}$ . Finalement,  $u_n - \varphi = \frac{(\psi - \varphi)\psi^n}{\sqrt{5}F_n} = \frac{-\psi^n}{F_n}$ . Comme  $-\psi^n = -\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n$ , on obtient bien, en valeur absolue,  $|u_n - \varphi| = \frac{1}{\varphi^n F_n}$ .

(b) Il suffit pour cela de constater que  $\varphi^n \leq F_n$ . Si  $n$  est pair, c'est évident, puisque  $F_n \leq \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ ,

mais même dans le cas où  $n$  est impair,  $\varphi^n - \psi^n \leq 2\varphi^n$  puisque  $|\psi| < \varphi$ , donc  $F_n \leq \frac{2\varphi^n}{\sqrt{5}} < \varphi^n$ .

- (c) Il faut trouver une valeur de  $F_n$  telle que  $F_n^2 > 10^4$ , donc  $F_n \geq 100$ . Un calcul légèrement laborieux nous mène à trouver  $F_{12} = 144$ . On a alors  $u_{12} = \frac{233}{144}$  qui est une valeur approchée de  $\varphi$  à  $10^{-4}$  près par excès puisque tous les termes d'indice pair de la suite sont plus grands que  $\varphi$ . Une passionnante division « à la main » permet d'obtenir que  $\frac{233}{144} \simeq 1.61806$ , et les plus courageux vérifieront de même que  $u_{13} = \frac{377}{233} > 1.6180$ , ce qui permet d'affirmer que 1.6180 et 1.6181 sont les valeurs approchées de  $\varphi$  à  $10^{-4}$  près par défaut et par excès.

## II. Quelques propriétés rigolotes des nombres de Fibonacci.

- On peut bien sûr procéder par récurrence. Comme  $F_2 = F_1 = 1$  et  $F_0 = 0$ , la propriété est vraie au rang 1. Supposons donc qu'elle reste vraie au rang  $n$ , alors  $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$ . Comme  $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$ , la propriété reste vraie au rang  $n + 1$ , et donc valable pour tout entier  $n$ .
- On sait que, quels que soient les entiers naturels  $n$  et  $p$ ,  ${}^n \times A^p = A^{n+p}$ . Or, en utilisant la question précédente, les deux termes non-diagonaux de  $A^{n+p}$  sont égaux à  $F_{n+p}$ , et le terme deuxième ligne première colonne de  $A^n \times A^p$  est égal à  $F_n F_{p+1} + F_{n-1} F_p$ , ce qui prouve l'égalité. En prenant  $n = p + 1$ , on trouve  $F_{2p+1} = F_p^2 + F_{p+1}^2$ , ce qui prouve bien que les termes d'indices impairs de la suite sont sommes de deux carrés d'entiers.
- Même pas besoin de calculer  $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , cela découle de la première question et du fait que  $F_3 = 2$ . En tout cas, on a très clairement  $A^2 = A + I$ . En appliquant le binôme de Newton à cette égalité (les matrices  $A$  et  $I$  commutent certainement), on trouve alors  $(A^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k I^{n-k}$ , soit  $A^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k$ . Il suffit de regarder ce que donne cette égalité pour les coefficients non diagonaux pour obtenir  $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$ .
- En développant bêtement (on peut écrire de jolies sommes si on le souhaite), on a un beau télescopage :  $(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^n) = I + A + A^2 + \dots + A^n - (A + A^2 + \dots + A^{n+1}) = I - A^{n+1}$ .
  - Il s'agit donc d'inverser la matrice  $I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Allez, passons par la résolution dun système extraordinaire difficile, constitué des équations  $-y = a$  et  $-x + y = b$ , ce qui donne  $y = -a$  et  $x = y - b = -a - b$ , donc  $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .
  - En multipliant l'égalité montrée au a, par  $(I - A)^{-1}$ , on trouve  $I + A + \dots + A^n = (I - A)^{-1}(I - A^{n+1})$ . Regardons encore une fois ce que valent les coefficients non diagonaux des matrices de cette égalité : à gauche, on a  $\sum_{k=0}^n F_k$ , et à droite  $-(-F_{n+1}) - (1 - F_n) = F_{n+1} + F_n - 1 = F_{n+2} - 1$ , exactement ce qu'on voulait prouver.
- En notant  $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ , commençons par calculer  $MN = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$ , donc  $\det(MN) = (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) = acef + adeh + bcfg + bdgh - acef -$

$adfg - bceh - bdgh = adeh + bcfg - adfg - bceh$ . Bon, c'est bourrin, mais on constate facilement que c'est égal à  $(ad - bc)(eh - fg) = adeh - adfg - bceh + bcfg$ .

(b) Il suffit évidemment de calculer  $M \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - cd & -bc + ad \end{pmatrix} = \det(M)I_2$ , pour constater que l'égalité de l'énoncé est vraie.

(c) On constate très simplement que  $v_n = \det(A^n) = (\det(A))^n$ , qui est bien une suite géométrique, de premier terme 1, et de raison  $\det(A) = -1$ . Autrement dit,  $v_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ .

6. Pour comparer les deux nombres, calculons leur tangente : à droite, c'est facile, ça vaut bien évidemment 1. À gauche, c'est à peine plus compliqué, mais il faut bien sûr se souvenir de ses

formules d'addition de tangente :  $\tan \left( \arctan \left( \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} \right) - \arctan \left( \frac{F_n}{F_{n+3}} \right) \right) = \frac{\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_n}{F_{n+3}}}{1 + \frac{F_{n+2}F_n}{F_{n+1}F_{n+3}}} =$

$$\frac{F_{n+2}F_{n+3} + F_{n+1}F_n}{F_{n+1}F_{n+3} - F_{n+2}F_n} = \frac{F_{n+2}(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_{n+1}(F_{n+2} - F_{n+1})}{F_{n+2}^2 + (-1)^{n+2} + F_{n+1}^2 - (-1)^{n+1}} = \frac{F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2}{F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2} = 1.$$

Les esprits grincheux feront sûrement remarquer que poser cette question sans demander de démontrer la formule de la question 5 auparavant était extrêmement vicieux. Ils ont raison, mais bon, c'était la dernière question, de toute façon, personne n'a été jusque là. En attendant, les deux membres ont donc la même tangente, ils sont égaux à  $\pi$  près. Mais comme  $0 < \frac{F_n}{F_{n+3}} < 1$ ,

on a certainement  $0 < \arctan \left( \frac{F_n}{F_{n+3}} \right) < \frac{\pi}{4}$ . L'autre arctangente étant pour le même genre de

raison comprise entre  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{2}$ , la différence des deux est (strictement) comprise entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , et donc bien égale à  $\frac{\pi}{4}$ . On obtient ainsi toute une série de formules palpitants, comme par

exemple  $\arctan \left( \frac{55}{34} \right) - \arctan \left( \frac{21}{89} \right) = \frac{\pi}{4}$ . Étonnant, non ?