Devoir Surveillé n°4

PTSI B Lycée Eiffel

11 janvier 2014

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 : matrices (avec très peu de suites)

On considère dans cet exercice les trois matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Les questions sont pour la plupart indépendantes les unes des autres.

1. Déterminer par la méthode de votre choix l'inverse P^{-1} de la matrice P (vous êtes priés de **vérifier** en testant le produit par P que votre inverse est correcte, ça peut resservir pour la suite de l'exercice).
2. (a) Calculer A^2 et A^3, puis exprimer A^3 en fonction de A^2 et de I_4 (sans faire intervenir A).
   (b) En déduire (sans refaire de pivot de Gauss !) l'inverse de la matrice A.
3. (a) Calculer les produits AP et TP (s'il ne se passe rien de remarquable, recommencer).
   (b) Prouver que, pour tout entier naturel n, $A^n = PT^nP^{-1}$.
   (c) Calculer T^{-1} (ça doit être très rapide), et vérifier que la relation de la question précédente reste vraie pour $n = -1$.
4. Montrer que, pour tout entier naturel n, $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & u_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, et déterminer u_{n+1} en fonction de u_n. Cette relation permet-elle de calculer facilement u_n et T^n ?
5. On pose $B = T - 2I_4$.
   (a) Calculer les premières puissances de B (au moins jusqu'à B^3), en déduire l'expression de B^k pour les valeurs suivantes de k.
   (b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer T^n, et en déduire la valeur de u_n.
   (c) Détailler tous les coefficients de la matrice A^n.
6. (a) Déterminer l'ensemble de toutes les matrices qui commutent avec la matrice T.
   (b) Prouver qu'une matrice M commute avec A si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec T.
   (c) Montrer que les matrices qui commutent avec A peuvent toutes s'écrire sous la forme $\alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3$, où C_1, C_2 et C_3 sont trois matrices à préciser.

Exercice 2 : suites (sans l'ombre d'une matrice)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 3$ et les relations $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \dfrac{7}{u_n}$.

1. Calculer les premiers termes de chaque suite (on s'arrêtera à u_2 et v_2, en donnant évidemment des valeurs sous forme fractionnaire).
2. Justifier que les deux suites ne comportent que des termes strictement positifs.
3. Démontrer que $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$, en déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$, puis que $u_n \geq v_n$ pour tout entier naturel n.
4. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites (u_n) et (v_n).
5. (a) Montrer que, $\forall n \geq 1$, $u_n \geq \dfrac{21}{8}$.
   (b) En déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.
   (c) Montrer par récurrence que $u_n - v_n \leq \dfrac{1}{10^{2^n - 1}}$, et en déduire la limite de la suite $(u_n - v_n)$.
6. Conclure des questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et donner leur limite commune.
7. Déterminer une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} près.

Exercice 3 : suites (avec pas mal de matrices)

On va s'intéresser dans ce dernier exercice à quelques propriétés d'une suite que vous connaissez bien : la suite de Fibonacci (F_n) définie par les conditions $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

I. Approximations rationnelles du nombre d'or.

Le nombre d'or est le réel $\varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, on pourra noter $\psi = -\dfrac{1}{\varphi}$ l'opposé de son inverse si on le souhaite.

1. (a) Vérifier que $\psi = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.
   (b) En remarquant que (F_n) est une suite d'un type bien connu, déterminer explicitement F_n en fonction de n (on ne sera pas surpris d'avoir des coefficients un peu laids, et on se posera par contre des questions philosophiques si φ n'intervient pas dans la formule).
   Bon, comme la formule peut resservir à plusieurs endroits, je suis gentil, je vous en donne une version : $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.
2. On note, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.
   (a) Donner la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n).
   (b) Étudier la monotonie de la suite (u_n) (ne vous étonnez pas s'il n'y a pas de conclusion simple).
   (c) En utilisant le résultat de la question 1, prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \varphi$.
   (d) Déterminer une fonction simple f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier la fonction f, puis tracer dans un même repère une allure de sa courbe représentative et la droite d'équation $y = x$. Faire un schéma permettant de comprendre la monotonie et la limite de la suite (u_n) dans ce même repère.

3. (a) Montrer que, $\forall n \geq 1$, $|\varphi - u_n| = \dfrac{1}{\varphi^n F_n}$.

   (b) En déduire que $|\varphi - u_n| \leq \dfrac{1}{F_n^2}$.

   (c) Donner un nombre rationnel approchant φ à 10^{-4} près (on utilisera évidemment la question précédente). Est-ce une approximation par défaut ou par excès ? Donner les valeurs décimales approchées à 10^{-4} près par défaut et par excès de φ.

II. Quelques propriétés rigolotes des nombres de Fibonacci.

On note dans toute cette partie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.
2. Montrer en utilisant la question précédente que $F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}$. En déduire que tous les termes impairs de la suite de Fibonacci sont des nombres entiers pouvant s'écrire comme somme de deux carrés de nombre entiers.
3. Déterminer une relation entre A^2, A et I_2. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$.
4. (a) Simplifier $(I_2 - A)(I_2 + A + A^2 + \cdots + A^n)$.

   (b) Calculer l'inverse de la matrice $I_2 - A$.

   (c) À l'aide des deux résultats précédents, montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.
5. Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle déterminant de M le réel $ad - bc$, et on le note $\det(M)$.

   (a) Vérifier que $\det(MN) = \det(M) \times \det(N)$, en déduire que $\det(M^n) = (\det(M))^n$ (pour des matrices carrées d'ordre 2).

   (b) Montrer que, si M est inversible, $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

   (c) En déduire que la suite définie par $v_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$ est une suite géométrique, et déterminer sa valeur.
6. Une dernière question pour ceux qui s'ennuieraient (on ne sait jamais) : prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\arctan\left(\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right) - \arctan\left(\dfrac{F_n}{F_{n+3}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.