Devoir Surveillé n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

30 novembre 2013

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

1. L'équation caractéristique associée est r^2+2r+4, qui a pour discriminant $\Delta=-12$, et admet deux racines complexes conjuguées $r_1=\dfrac{-2+i\sqrt{12}}{2}=-1+i\sqrt{3}$ et $r_2=-1-i\sqrt{3}$. Avec les notations vues en cours, on a donc $r=-1$ et $\omega=\sqrt{3}$, ce qui donne des solutions homogènes de la forme $y_h(x)=(A\cos(\sqrt{3}x)+B\sin(\sqrt{3}x))e^{-x}$.
2. Le second membre est un produit de polynôme par une exponentielle, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x)=(ax+b)e^x$. On aura alors $y_p'(x)=(a+ax+b)e^x$, puis $y_p''(x)=(ax+2a+b)e^x$, dont $y_p''(x)+2y_p'(x)+4y_p(x)=(ax+2a+b+2ax+2a+2b+4ax+4b)e^x=(7ax+4a+7b)e^x$. Par identification, y_p sera solution si $7a=1$ et $4a+7b=0$, soit $a=\dfrac{1}{7}$ et $b=-\dfrac{4}{49}$. Autrement dit $y_p(x)=\dfrac{(7x-4)e^x}{49}$, et les solutions de l'équation complète sont donc toutes les fonctions $y : x\mapsto \dfrac{(7x-4)e^x}{49}+(A\cos(\sqrt{3}x)+B\sin(\sqrt{3}x))e^{-x}$.
3. En reprenant la formule précédente pour les solutions, $y(0)=1\Leftrightarrow -\dfrac{4}{49}+A=1$, soit $A=\dfrac{53}{49}$, et $y(1)=0\Leftrightarrow -\dfrac{3e}{49}+\dfrac{A\cos(\sqrt{3})+B\sin(\sqrt{3})}{e}=0$, soit $B=\dfrac{3e^2}{49\sqrt{3}}-\dfrac{53e}{49\tan(\sqrt{3})}$. Ces valeurs ignobles sont bel et bien uniques, et donnent une solution particulière que je n'ai même pas envie de recopier entièrement (mais oui, cette question était sans aucun intérêt !).
4. On pose donc plus simplement $f(t)=g(\ln(t))$, ce qui est légitime pour une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, et on calcule comme d'habitude $f'(t)=\dfrac{1}{t}g'(\ln(t))$ puis $f''(t)=-\dfrac{1}{t^2}g'(\ln(t))+\dfrac{1}{t^2}g''(\ln(t))$. En reportant ces valeurs dans l'équation, on trouve $g''(\ln(t))+2g'(\ln(t))+4g(\ln(t))=t\ln(t)$, soit $g''(x)+2g'(x)+4g(x)=xe^x$. Coïncidence extraordinaire, il s'agit justement de l'équation qu'on vient de résoudre, on connait donc les fonctions g solutions et il ne reste plus qu'à refaire le changement de variable $f(t)=g(\ln(t))$ pour trouver $f : t\mapsto \dfrac{t(7\ln(t)-4)}{49}+\dfrac{A\cos(\sqrt{3}\ln(t))+B\sin(\sqrt{3}\ln(t))}{t}$.

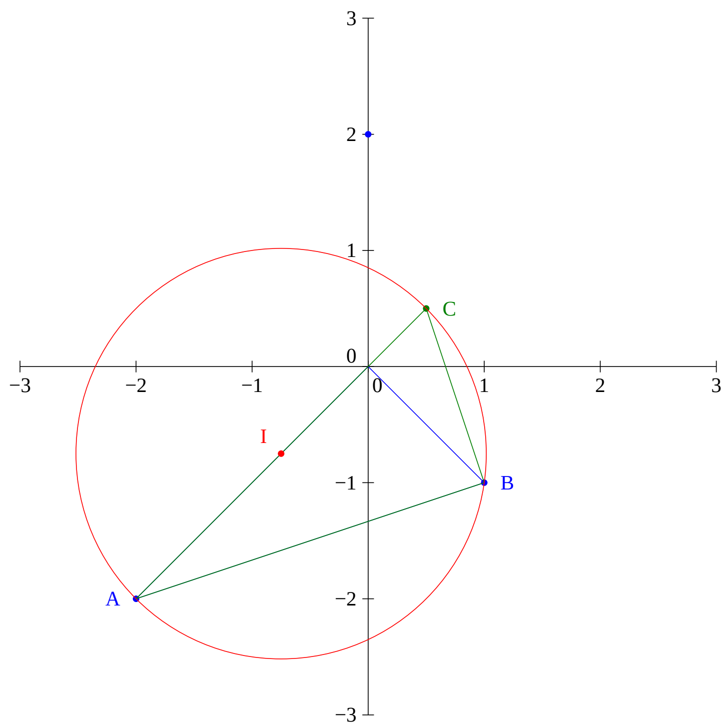
Exercice 2

1. (a) Posons $z=bi$, alors $z^2=-b^2$ et $z^3=-b^3i$, donc $z^3+(1+i)z^2+(2-2i)z+8i=-b^3i-b^2-b^2i+2bi+2b+8i$. En séparant partie réelle et partie imaginaire, z est donc solution de notre équation si $-b^2+2b=0$, et $-b^3-b^2+2b+8=0$. La première condition

donne $b = 0$ ou $b = 2$, la deuxième équation ne s'annule pas pour $b = 0$ mais s'annule pour $b = 2$ puisque $-8 - 4 + 4 + 8 = 0$, donc $z = 2i$ est solution imaginaire pure de notre équation.

(b) On peut donc factoriser le membre de gauche de l'équation sous la forme $(z-2i)(az^2+bz+c) = az^3+(b-2ai)z^2+(c-2bi)z-2ci$. Par identification, on doit avoir $a = 1$; $b-2ai = 1+i$, donc $b = 1+3i$; $c-2bi = 2-2i$, donc $c = -4$. Reste à résoudre l'équation du second degré $z^2+(1+3i)z-4 = 0$. Elle a pour dicsriminant $\Delta = (1+3i)^2+16 = 8+6i$. On cherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Comme $\delta^2 = a^2-b^2+2abi$, on trouve les deux conditions $a^2-b^2 = 8$ et $2ab = 6$. On ajoute l'équation aux modules $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{64+36} = 10$. En ajoutant et soustrayant la première et la dernière équations obtenues, on trouve $2a^2 = 18$ et $2b^2 = 2$, soit $a = \pm 3$ et $b = \pm 1$. Comme ab est positif, a et b doivent être de même signe et on peut prendre $\delta = 3+i$. On en déduit les solutions de notre équation du second degré : $z_1 = \dfrac{-1-3i+3+i}{2} = 1-i$ et $z_2 = \dfrac{-1-3-3-i}{2} = -2-2i$. Les solutions de l'équation initiale sont donc données par $\mathcal{S} = 2i, 1-i, -2-2i$.

(c)



2. Par un calcul de distances, on va utiliser ce bon vieux théorème de Pythagore (ou plutôt sa réciproque, en l'occurence). On calcule donc $OA = |-2-2i| = \sqrt{8}$, $OB = |1-i| = \sqrt{2}$, et $AB = |1-i-(-2-2i)| = |3+i| = \sqrt{10}$. Constatant aisément que $OA^2+OB^2 = 10 = AB^2$, on en déduit que OAB est rectangle en O. Autre possiblité, calculer des arguments : comme $z_A = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$, on a $\arg(z_A) = -\dfrac{3\pi}{4}$. De même, $z_B = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$, donc $\arg(z_B) = -\dfrac{\pi}{4}$. On en déduit que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui prouve que le triangle OAB est rectangle en O.

3. (a) On a en fait déjà effectué les calculs nécessaires à la question précédente. La similitude f vérifie $f(O) = O$ et $f(A) = B$, donc son rapport est $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \dfrac{1}{2}$. Son angle est l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = \dfrac{\pi}{2}$. L'application f est donc la composée de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et de l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

si on veut en donner une expression analytique, on a donc $f(z) = \frac{1}{2}iz$ (qu'on peut aussi obtenir par la résolution d'un système).

(b) Un calcul idiot suffit : $f \circ f(z) = -\frac{1}{4}z$, donc $f \circ f$ est simplement l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{4}$.

(c) D'après la question précédente, $z_C = -\frac{1}{4}z_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. On peut alors calculer par exemple $\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}{3+i} = \frac{1}{2}\frac{i(3+i)}{3+i} = -\frac{i}{2}$. ce nombre étant imaginaire pur, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en B.

4. (a) Donnons par exemple une équation cartésienne : $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{8}$, soit $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} + y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{50}{16}$, soit $x^2 + \frac{3}{2}x + y^2 + \frac{3}{2}y - 2 = 0$.

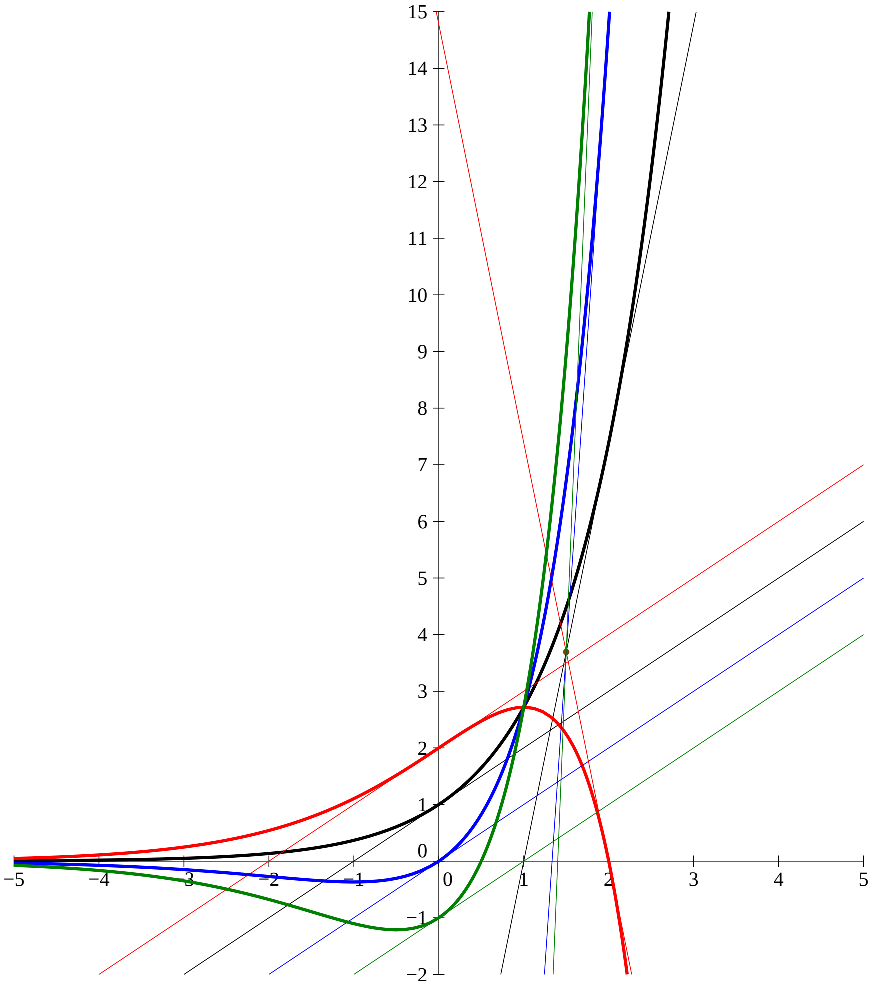
(b) Vérifions donc que leurs coordonnées vérifient l'équation : $(-2)^2 + \frac{3}{2} \times (-2) + (-2)^2 + \frac{3}{2} \times (-2) - 2 = 4 - 3 + 4 - 3 - 2 = 0$, c'est bon pour A ; $1 + \frac{3}{2} + 1 - \frac{3}{2} - 2 = 0$, c'est bon pour B ; $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 = 0$, c'est bon également pour C.

(c) Il suffit de constater que $z_I = \frac{z_A + z_C}{2}$ pour en déduire que I est le milieu de $[AC]$. Or, dans le triangle rectangle ABC, le milieu I de l'hypothénuse est également le centre du cercle circonscrit au triangle. Il est donc tout à fait normal que les trois points A, B et C soient situés à égale distance du point I, et un seul calcul de distance au lieu de trois aurait pu suffire.

Exercice 3

1. Puisqu'il faut diviser par $1 - x$, on va effectuer une résolution séparée sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
2. On cherche donc à résoudre l'équation linéaire $y' + \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) y = \frac{e^x}{1-x}$. L'équation homogène associée a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{x+\ln|1-x|} = Ke^x(1-x)$ (quitte à changer le signe de la constante sur $]-\infty; 1[$).
3. Pour trouver une solution particulière à l'équation, rien de mieux ici que d'utiliser la méthode de variation de la constante : on cherche $y_p(x) = K(x)(1-x)e^x$, ce qui donne $y_p'(x) = K'(x)(1-x)e^x - K(x)e^x + K(x)(1-x)e^x$. La fonction y_p est donc solution de l'équation initiale si $K'(x)(1-x)e^x - K(x)e^x + K(x)(1-x)e^x + K(x)e^x - K(x)e^x(1-x) = \frac{e^x}{1-x}$, c'est-à-dire si $K'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. On peut choisir $K(x) = \frac{1}{1-x}$, soit $y_p(x) = e^x$. Bon, euh oui, en fait on aurait pu se rendre compte que cette solution était plus ou moins évidente. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto (1 + K(1-x))e^x$.
4. Les fonctions obtenues sont certainement définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles vérifient toutes $y(1) = e$, et comme $y'(x) = (-K + 1 + K(1-x))e^x = (1 - Kx)e^x$, on a $y'(1) = (1-K)e$. On ne peut donc pas recoller des morceaux ayant des valeur différentes de la constante K sur chacun des deux intervalles.
5. Avec la forme précédente, $y(0) = 1 + K$, donc $f(0) = \alpha$ se produit si et seulement si $K = \alpha - 1$. La solution cherchée est bien unique. De plus, $y'(0) = 1$ quelle que soit la valeur de K, donc les tangentes de toutes les solutions en 0 sont effectivement parallèles.

6. Continuons nos petits calculs : $y(2) = (1-K)e^2$, et $y'(2) = (1-2K)e^2$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est donc $(1-2K)e^2(x-2) + (1-K)e^2 = [(1-2K)x + 3K - 1]e^2$. Si on veut que toutes ces droites soient concourantes, il faut trouver une valeur de x pour laquelle l'expression précédente ne dépend pas de K, ce qui est effectivement le cas si $-2Kx + 3K = 0$, soit $x = \frac{3}{2}$. On a alors toujours $y = \frac{e^2}{2}$, les tangentes se coupent donc au point de coordonnées $\left(\frac{3}{2}; \frac{e^2}{2}\right)$.
7. Rien de bien difficile, la dérivée s'annule pour $x = \frac{1}{K}$ (sauf évidemment dans le cas particulier $K = 0$, où y est simplement la fonction exponentielle qu'on n'a pas vraiment besoin d'étudier), la fonction est croissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{K}\right[$ et croissante sur $\left]\frac{1}{K}; +\infty\right[$, la limite de y en $-\infty$ est toujours nulle (pas croissance comparée), en $+\infty$ ça dépend du signe de K : si $K < 0$, $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$, et si $K > 0$, $\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$.
8. On peut bien évidemment tracer les tangentes étudiées plus haut en plus des courbes des fonctions, qui correspondent à $K = -1$, $K = 0$ (fonction exponentielle), $K = 1$ et $K = -2$. En bleu $\alpha = 0$, en noir $\alpha = 1$, en rouge $\alpha = 2$ et en vert $\alpha = -1$. Les tangentes en 0 ont pour équations respectives $y = x$, $y = x + 1$, $y = x + 2$ et $y = x + 3$. Et les tangentes en 2 ont pour équation respectives $y = (3x - 4)e^2$, $y = (x - 1)e^2$, $y = (-x + 2)e^2$ et $y = (5x - 7)e^2$.



Exercice 4

1. (a) Jusque-là, c'est facile : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

   (b) Pour que $g(x)$ soit défini, il faut donc que -1 ne soit pas compris entre $\dfrac{1}{x}$ et x. Bien évidemment, $x = 0$ est exclu du domaine de définition. De plus, si $x < 0$, -1 est toujours compris entre $\dfrac{1}{x}$ et x (soit $x < -1$ et $\dfrac{1}{x} > -1$, soit c'est le contraire). Par contre, si $x > 0$, seuls des nombres positifs sont compris entre x et $\dfrac{1}{x}$, donc $g(x)$ est défini. Pour conclure, on a simplement $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^{+*}$.

   (c) Remplacer x par $\dfrac{1}{x}$ dans la définition de g ne change qu'une chose : les bornes, qui sont inversées. Autrement dit, on aura toujours $g\left(\dfrac{1}{x}\right) = -g(x)$.

2. (a) Il n'y a rien à expliquer, c'est la définition de l'intégrale !

   (b) On peut dériver la relation $g(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$, en faisant attention à la composée, pour obtenir $g'(x) = f(x) + \dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} + \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{(\frac{1}{x}+1)^2(\frac{1}{x^2}+1)} = \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} + \dfrac{x^2}{(1+x)^2(1+x^2)}$ (en multipliant chacune des deux parenthèses de la deuxième fraction par x). Tout cela se simplifie merveilleusement bien pour donner $g'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, donc $g(x) = -\dfrac{1}{1+x} + k$, où k est une constante qu'on va bien sûr déterminer explicitement à l'aide d'une valeur simple de g. Ici, le plus rapide est bien sûr de constater que $g(1) = 0$ (puisque, dans ce cas, les deux bornes de l'intégrale sont identiques), donc $0 = -\dfrac{1}{2} + k$, soit $k = \dfrac{1}{2}$. Finalement, $g(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-2}{2(1+x)} = \dfrac{x-1}{2(1+x)}$.

3. (a) Faisons donc ce qu'on nous suggère : on pose $u = \dfrac{1}{t}$, soit $t = \dfrac{1}{u}$, et $dt = -\dfrac{1}{u^2}\,du$. Les bornes de l'intégrale sont alors échangées, ce qu'on va compenser par un simple changement de signe. On trouve alors $g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(\frac{1}{u}+1)^2(\frac{1}{u^2}+1)} \times \frac{1}{u^2}\,du = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{u^2}{(u+1)^2(u^2+1)}\,du$ (le calcul est essentiellement le même qu'à la question 2*b*). Si on additionne les deux expressions de $g(x)$ (en utilisant comme variable muette commune t dans l'intégrale).

   (b) On a alors $2g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)} + \frac{t^2}{(t+1)^2(t^2+1)}\,dt = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t+1}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \frac{x-1}{x+1}$. On retrouve la même expression que tout à l'heure (encore heureux) : $g(x) = \dfrac{x-1}{2(1+x)}$.

4. (a) Pour une fois, soyons bourrins, et effectuons une brutale mise au même dénominateur : $\dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{(t+1)^2} + \dfrac{ct+d}{t^2+1} = \dfrac{a(t+1)(t^2+1) + b(t^2+1) + (ct+d)(t+1)^2}{(t+1)^2(t^2+1)}$. Contentons-nous de développer le numérateur : $a(t^3+t^2+t+1)+b(t^2+1)+c(t^3+2t^2+t)+d(t^2+2t+1) = (a+c)t^3+(a+b+2c+d)t^2+(a+c+2d)t+a+b+d$. Par identification, on obtient les conditions $a + c = 0$, $a + b + 2c + d = 0$, $a + c + 2d = 0$ et $a + b + d = 1$. On en déduit que $c = -a$, donc $2d = 0$ (troisième condition) et $d = 0$. On reporte alors dans la deuxième équation : $a+b-2a = 0$, soit $a = b$. Reste alors à exploiter la dernière condition, qui devient $a+a = 1$, soit $a = b = \dfrac{1}{2}$ et $c = -\dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $f(t) = \dfrac{1}{2(t+1)} + \dfrac{1}{2(t+1)^2} - \dfrac{t}{2(t^2+1)}$.

(b) On déduit de la question précédente une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$: $F(t) = \frac{1}{2}\ln(t+1) - \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{4}\ln(t^2+1)$. On peut alors calculer directement $g(x) = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}+1\right) + \frac{1}{2(\frac{1}{x}+1)} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{x}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{4}\ln(x^2) = \frac{x-1}{2(x+1)}$ (tous les ln s'annulent puisque $\ln(x^2) = 2\ln(x)$.

5. Notons I l'intégrale à calculer et commençons par écrire que $I = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\theta)} + \frac{2\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}\, d\theta$.

   On peut alors avoir la brillante idée de poser $t = \tan(\theta)$, ou encore $\theta = \arctan(t)$, donc $d\theta = \frac{1}{1+t^2}\, dt$. On trouve alors $I = \int_{\tan(\alpha)}^{\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)} \frac{1}{1+t^2+2t} \times \frac{1}{1+t^2}\, dt$ (en utilisant la relation $\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$. Il ne reste plus qu'à remarquer que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$ (c'est dans le cours de trigo !) pour en déduire que $I = g(\tan(\alpha))$. En utilisant les résultats des questions précédentes, on peut conclure que $I = \frac{\tan(\alpha) - 1}{2(1+\tan(\alpha))}$.