Devoir Surveillé n°3

PTSI B Lycée Eiffel

30 novembre 2013

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = xe^x$.

1. Résoudre l'équation sans second membre associée à cette équation.
2. Trouver une solution particulière de l'équation, et en déduire ses solutions.
3. Déterminer explicitement la solution y de l'équation vérifiant $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$ (cette solution est-elle unique ?).
4. On considère pour cette dernière question l'équation $t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\ln(t)$, où f est supposée définie uniquement sur $]0, +\infty[$. En posant $g(x) = f(e^x)$, et en exploitant les résultats des questions précédentes, résoudre cette nouvelle équation.

Exercice 2

1. On considère l'équation $z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$.
   (a) Déterminer une solution imaginaire pure de cette équation.
   (b) En déduire toutes les solutions de l'équation.
   (c) Placer les images des solutions obtenues dans le plan complexe. On complètera la figure au fur et à mesure de l'exercice, elle doit contenir à la fin les points A, B, C et I ainsi que le cercle $\mathcal{C}$.
2. On note pour toute la suite de l'exercice A le point d'affixe $1-i$ et B celui d'affixe $2-2i$ dans le plan complexe. Vérifier de deux manières que le triangle OAB est rectangle (en notant bien sûr O l'origine du repère) : par un calcul de distances, et par un calcul d'arguments.
3. (a) Déterminer l'unique isométrie directe f de centre O vérifiant $f(A) = B$, préciser son angle et son rapport.
   (b) Caractériser l'application $f \circ f$.
   (c) On note $C = f \circ f(A)$. Vérifier que ABC est un triangle rectangle (méthode au choix, cette fois-ci).
4. On note I le point d'affixe $-\dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4}i$.
   (a) Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon $\dfrac{5}{\sqrt{8}}$.
   (b) Vérifier que A, B et C appartient tous les trois à ce cercle (si vous n'avez pas obtenu l'affixe du point C, faites le calcul au moins pour A et pour B).
   (c) Que représente I pour le segment $[BC]$? Comment le résultat de la question précédente auraitèil pu être démontré sans calculs (exploitez ce qui précède et vos souvenirs de géométrie des années antérieures) ?

Exercice 3

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle $(1-x)y' + xy = e^x$.

1. Sur quels intervalles va-t-on se placer pour résoudre l'équation homogène ?
2. Résoudre sur chacun de ces intervalles l'équation sans second membre associée à notre équation différentielle. On pourra remarquer que $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - 1$.
3. En déduire les solutions de l'équation complète sur les intervalles définis à la première question.
4. Étudier l'existence de solutions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier.
5. Montrer qu'il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}$, qu'on notera f_α, vérifiant $f(0) = \alpha$, et que toutes ces solutions ont des tangentes parallèles en 0.
6. Montrer que les tangentes en leur point d'abscisse 2 aux courbes représentatives des fonctions f_α sont toutes concourantes.
7. Étudier les fonctions f_α sur $\mathbb{R}$ (variations, limites).
8. Tracer dans un même graphique les courbes intégrales correspondant à $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ et $\alpha = -1$.

Exercice 4

On définit dans cet exercice une fonction g par la formule $g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}\, dt$, et on va donner plusieurs méthodes permettant de calculer explicitement la valeur de $g(x)$. Les questions 2, 3 et 4 de l'exercice sont **indépendantes**, il est donc hors de question d'utiliser le résultat d'une de ces questions (ou même d'une sous-question) pour traiter les autres.

1. On pose $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
   (b) En déduire celui de la fonction g.
   (c) Comparer les valeurs de $g(x)$ et de $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand cela a un sens.
2. Première méthode : on note F une primitive quelconque de f valable sur le domaine de définition de g.
   (a) Expliquer pourquoi $g(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (b) Exprimer $g'(x)$ à l'aide de f, puis explicitement. En déduire une expression de $g(x)$.
3. Deuxième méthode : exploitation astucieuse d'un changement de variable.
   (a) En posant $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale définissant $g(x)$, donner une nouvelle expression de $g(x)$.
   (b) Faire la somme des deux expressions intégrales de $g(x)$, et retrouver l'expression explicite de $g(x)$.
4. Troisième méthode : bourrinage.
   (a) Décomposer en éléments simples $f(t)$ sous la forme $f(t) = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{(t+1)^2} + \dfrac{ct+d}{t^2+1}$.
   (b) En déduire l'expression de $g(x)$ par une intégration directe.
5. Complément : soit $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Calculer $\displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2(\theta)}{1+\sin(2\theta)}\, d\theta$ (il y a bien sûr un lien avec le reste de l'exercice).