Devoir Surveillé n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

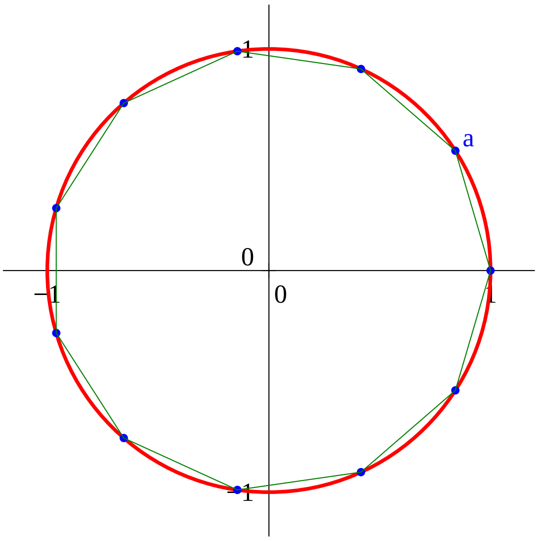
9 novembre 2013

Exercice 1

1. Calculons donc : $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2+2ij+j^2 = \sum_{i=1}^{n} ni^2+n(n+1)i+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(n+1)^2}{2}+\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(2(2n+1)+3(n+1))}{6} = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$.
2. Puisqu'on nous y invite si cordialement, prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $u_n = 3-2^n$. Au rang 0, $3-2^0 = 3-1 = 2 = u_0$ donc la propriété est effectivement vraie. Supposons-la vérifie à un certain rang n, on peut alors écrire $u_{n+1}^{=}2u_n - 3 = 2\times(3-2^n)-3 = 6-2^{n+1}-3 = 3-2^{n+1}$, ce qui prouve exactement P_{n+1}. Par principe de récurrence, la propriété P_n est donc vraie pour tout entier naturel n.
3. Procédons par étapes : $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)' = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$, puis $\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\times\dfrac{2}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}\times(1-x)\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. Enfin, $f'(x) = \dfrac{2}{1+\frac{1+x}{1-x}}\times\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2(1-x)}{2}\times\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Autrement dit, la fonction f a la même dérivée que la fonction arcsin (qui est bien définie sur tout l'intervalle de définition de f). On en déduit que $f(x) = \arcsin(x)+k$, où k est une constante réelle qu'on détermine aisément en calculant une valeur particulière de la fonction : $f(0) = 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$. Comme $\arcsin(0) = 0$, on peut conclure que $f(x) = \arcsin(x)+\dfrac{\pi}{2}$.
4. Soit on constate directement que -1 est racine évidente de l'équation, soit on sépare partie réelle et partie imaginaire dans l'équation $x^3+2x^2-3ix-1-3i = 0$ pour obtenir les deux conditions $x^3+2x^2-1 = 0$ et $-3x-3 = 0$, qui sont toutes deux vérifiées par -1 puisque $(-1)^3+2(-1)^2-1 = -1+2-1 = 0$, et $-3\times(-1)-3 = 3-3 = 0$. On peut donc factoriser : $z^3+2z^2-3iz-1-3i = (z+1)(az^2+bz+c) = az^3+(a+b)z^2+(b+c)z+c$. Par identification, on trouve les conditions $a = 1$, $b+a = 2$ donc $b = 1$, et $b+c = -3i$, soit $c = -3i-1$. Reste à résoudre l'équation $z^2+z-3i-1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1+4(3i+1) = 5+12i$. On cherche une racine du discriminant sous la forme $\delta = a+ib$. La condition $(a+ib)^2 = a^2-b^2+2iab = \Delta$ mène aux deux équations $a^2-b^2 = 5$ et $2ab = 12$, auxquelles on ajoute l'équation sur les modules $|\delta|^2 = a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$. En ajoutant la troisième équation à la première, on trouve $2a^2 = 18$, soit $a = \pm 3$, et en les soustrayant $2b^2 = 8$, soit $b = \pm 2$. comme $ab > 0$ d'après la deuxième équation, on peut choisir $\delta = 3+2i$ ou $\delta = -3-2i$. Les deux solutions de l'équation sont alors $z_1 = \dfrac{-1+3+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = \dfrac{-1-3-2i}{2} = -2-i$. L'équation initiale a donc pour ensemble de solutions $\mathcal{S} = \{-1, 1+i, -2-i\}$.

Exercice 2

1. On sait que les éléments de $\mathbb{U}_{11}$ sont les nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{11}}$, pour $k \in \{0, \dots, 10\}$. Comme $e^{i\frac{2k\pi}{11}} = (e^{\frac{2i\pi}{11}})^k$, on peut également les décrire sous la forme $\mathbb{U}_{11} = \{a^k \mid a \in \{0, \dots, 10\}\}$. Par ailleurs, $a^{11} = e^{i\frac{22\pi}{11}} = e^{2i\pi} = 1$. Pour placer les points, on trace un hendécagone (polygone régulier à 11 côtés, pour ceux qui ne connaitraient pas le terme) inscrit dans le cercle trigonométrique en partant de 1 :



2. Commençons par constater que $\overline{a} = e^{-\frac{2i\pi}{11}} = e^{\frac{20i\pi}{11}} = a^{10}$. De même, on vérifie aisément que $\overline{a^2} = a^9$, $\overline{a^3} = a^8$, $\overline{a^4} = a^7$ et $\overline{a^5} = a^6$ (une autre façon de présenter le calcul est de dire que $\overline{a^k} = \dfrac{1}{a^k} = a^{11-k}$ en utilisant le fait que tous ces nombres sont de module 1 puis que $a^{11} = 1$). On peut alors écrire $\overline{S} = \overline{a} + \overline{a^3} + \overline{a^4} + \overline{a^5} + \overline{a^9} = a^{10} + a^8 + a^7 + a^6 + a^2 = T$.

3. On constate aisément que $S+T = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} a^k$. Or on sait que la somme des racines 11-èmes de l'unité est égale à 0, c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{11} a^k = 0$. On en déduit que $S+T = 0-a^0 = -1$. Pour le produit, on n'échappe pas à un calcul laborieux : $ST = (a+a^3+a^4+a^5+a^9)(a^2+a^6+a^7+a^8+a^{10}) = a^3+a^7+a^8+a^9+a^{11}+a^5+a^9+a^{10}+a^{11}+a^{13}+a^6+a^{10}+a^{11}+a^{12}+a^{14}+a^7+a^{11}+a^{12}+a^{13}+a^{15}+a^{11}+a^{15}+a^{16}+a^{17}+a^{19}$. On peut remplacer tous les a^{11} par des 1, et de même $a^{12} = a^{11} \times a = a$, $a^{13} = a^2$ etc. Ce qui permet, en regroupant au maximum, d'écrire le produit sous la forme $ST = 2a+2a^2+2a^3+2a^4+2a^5+2a^6+2a^7+2a^8+2a^9+2a^{10}+5 = 2(S+T)+5 = 5-2 = 3$.

4. Les deux nombres S et T sont donc solutions de l'équation du second degré $x^2 + x + 3 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = -11$ et pour solutions $x_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{11}}{2}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{11}}{2}$. Reste à déterminer si $S = x_1$ ou $S = x_2$. En observant la figure faite à la première question, il est clair que c'est S qui a une partie imaginaire positive, prouvons le rigoureusement : $\mathrm{Im}\,(S) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) + \sin\left(\dfrac{6\pi}{11}\right) + \sin\left(\dfrac{8\pi}{11}\right) + \sin\left(\dfrac{10\pi}{11}\right) + \sin\left(\dfrac{18\pi}{11}\right)$. Or, $\sin\left(\dfrac{6\pi}{11}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{6\pi}{11}\right) = \sin\left(\dfrac{5\pi}{11}\right)$, et $\sin\left(\dfrac{18\pi}{11}\right) = -\sin\left(\dfrac{4\pi}{11}\right) > -\sin\left(\dfrac{5\pi}{11}\right)$, donc $\sin\left(\dfrac{6\pi}{11}\right) + \sin\left(\dfrac{18\pi}{11}\right) > 0$. Les trois termes restants étant des sinus d'angles compris entre 0 et π, donc positifs, $\mathrm{Im}\,(S) > 0$, donc $S = x_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{11}}{2}$, et donc $T = \dfrac{-1-i\sqrt{11}}{2}$.

5. Utilisons donc l'indication qui nous est donnée : $i \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = i\frac{\sin(\frac{3\pi}{11})}{\cos(\frac{3\pi}{11})} = \frac{i \times \frac{e^{i\frac{3\pi}{11}} - e^{-i\frac{3\pi}{11}}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{3\pi}{11}} + e^{-i\frac{3\pi}{11}}}{2}} = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{11}}(e^{i\frac{6\pi}{11}} - 1)}{e^{-i\frac{3\pi}{11}}(e^{i\frac{6\pi}{11}} + 1)} = \frac{a^3 - 1}{a^3 + 1}$.
   Par ailleurs, par un calcul de somme géométrique, $\sum_{k=1}^{10}(-a^3)^k = \sum_{k=0}^{10}(-a^3)^k - 1 = \frac{1 - (-a^3)^{11}}{1 + a^3} - 1 = \frac{2}{1 + a^3} - 1 = \frac{1 - a^3}{1 + a^3}$, ce qui est exactement l'opposé de $i \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$.
6. C'est un bête calcul : $a - a^{10} = e^{\frac{2i\pi}{11}} - e^{\frac{20i\pi}{11}} = e^{\frac{2i\pi}{11}} - e^{\frac{-2i\pi}{11}} = 2i \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$ en appliquant les formules d'Euler. Il suffit de tout multiplier par deux pour obtenir la formule demandée.
7. D'après les deux questions précédentes, $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = -\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{10}(-a^3)^k + \frac{2}{i}(a - a^{10}) = i(-a^3 + a^6 - a^9 + a^{12} - a^{15} + a^{18} - a^{21} + a^{24} - a^{27} + a^{30} - 2a + 2a^{10}) = i(-a + a^2 - a^3 - a^4 - a^5 + a^6 + a^7 + a^8 - a^9 + a^{10}) = i(T - S)$. Il ne reste plus qu'à reprendre les expressions explicites de T et S pour constater que $T - S = \frac{-2i\sqrt{11}}{2} = -i\sqrt{11}$, donc $i(T - S) = \sqrt{11}$.

Exercice 3

1. Si $A = \emptyset$, $f(C) = (C \cap \emptyset) \cup B = \emptyset \cup B = B$, quel que soit le sous-ensemble C. L'application f est donc constante égale à B.
2. Dans ce deuxième cas particulier, on aura toujours $f(C) = \mathbb{R}$, l'application est à nouveau constante. Ces deux cas ne sont pas du tout les seuls. Par exemple, lorsque $A = B$, on aura toujours $C \cap A \subset A = B$, donc $(C \cap A) \cup B = B$. Ainsi, si $A = B = [0, 1]$, f est constante égale à $[0, 1]$ (pour donner un exemple concret parmi tant d'autres).
3. Calculons donc : $f(\emptyset) = \emptyset \cup B = B$; $f(A) = A \cup B$; $f(B) = (B \cap A) \cup B = B \cap (A \cup B) = B$; et enfin $f(\mathbb{R}) = A \cup B$.
4. C'est essentiellement évident : si $C \subset D$, alors $C \cap A \subset D \cap A$ (en effet, si $x \in C \cap A$, $x \in C \subset D$ donc $x \in D$ et $x \in A$ par hypothèse), puis $f(C) \subset f(D)$ (démonstration tout aussi triviale pour l'union avec B que pour l'intersection avec A).
5. Supposons donc que E admette un antécédent par f, que nous noterons C : on a donc $(C \cap A) \cup B = E$. Manifestement, $B \subset B \cup (C \cap A)$, donc $B \subset E$. De plus, $(C \cap A) \subset A$, donc $E = f(C) \subset A \cup B$. Réciproquement, supposons $B \subset E \subset A \cup B$, et prouvons que $f(E) = E$, ce qui prouvera en passant que E admet un antécédent par f. Soit $x \in E$. Si $x \in B$, nécessairement $x \in f(E)$ (les images par f contiennent toujours tout l'ensemble B), sinon $x \in A$ puisque puisque $E \subset A \cup B$, donc $x \in E \cap A$, et $x \in f(E)$. On en déduit que $E \subset f(E)$. Supposons désormais $x \in f(E)$. Soit $x \in (E \cap A)$, et donc $x \in E$, soit $x \in B \subset E$ donc $x \in E$. On en déduit que $f(E) \subset E$, et donc $f(E) = E$.
6. D'après la question précédente, une condition nécessaire pour que A puisse avoir des antécédents par f est que $B \subset A$. Si c'est le cas, $f(C) \subset A$ quel que soit le sous-ensemble C (puisque $C \cap A$ et B sont tous deux inclus dans A), et $f(C) = A$ si et seulement si $A \backslash B \subset C \cap A$ (pour récuper dans l'union avec B tous les éléments de A n'appartenant pas à B). Il suffit donc d'avoir $A \backslash B \subset C$. Tous les sous-ensembles vérifiant cette condition seront antécedents de A. Pour B (qui est toujours sa propre image et a donc toujours des antécédents), on doit cette fois-ci avoir $C \cap A \subset B$, c'est-à-dire $C \cap (A \backslash B) = \emptyset$. Si on préfère, une condition nécessaire est suffisante est $C \subset B \cup \bar{A}$.

7. Puisque $f(B)$ est toujours égale à B, f ne peut être constante que si tout le monde est antécédent de B, c'est-à-dire si tout sous-ensemble C vérifie la condition $C \subset B \cup \bar{A}$. Il faut donc avoir $B \cup \bar{A} = \mathbb{R}$, ce qui revient exactement à dire que $A \subset B$. On vérifie aisément que cette condition est en effet nécessaire et suffisante : si $A \subset B$, on aura toujours $C \cap A \subset B$, donc $f(C) = B$, et f est constante ; réciproquement, s'il existe un élément $x \in A \backslash B$, $f(\{x\}) = \{x\} \cup B \neq f(B)$, donc f n'est pas constante.
8. Toujours en reprenant les résultats de la question 5., l'application sera surjective si tout sous-ensemble E vérifie les conditions $B \subset E \subset A \cup B$. Ceci n'est possible que si $B = \emptyset$ et $A \cup B = \mathbb{R}$, c'est-à-dire $B = \emptyset$ et $A = \mathbb{R}$. Dans ce cas très particulier, on a $f(C) = (C \cap \mathbb{R}) \cup \emptyset = C$, et l'application f est donc l'identité, qui est certainement surjective ! Pour l'injectivité, il faut déjà que B admette un seul antécédent par f (B a toujours au moins un antécédent puisque $f(B) = B$), ce qui revient à dire qu'un seul sous-ensemble C vérifie $C \subset B \cup \bar{A}$. Pour cela, il faut nécessairement que $B \cup \bar{A} = \emptyset$, donc que $B = \bar{A} = \emptyset$, ce qui revient bien à dire que $B = \emptyset$ et $A = \mathbb{R}$.
9. Quel que soit le sous-ensemble C, on a toujours $B \subset f(C)$, mais aussi $f(C) \subset A \cup B$ puisque $C \cap A \subset A$. Autrement dit, $f(C)$ vérifie toujours les conditions de la question 5., et en reprenant les conclusions de cette même question, on a nécessairement $f(f(C)) = f(C)$. Autrement dit, $f \circ f$ (pour faire savant, f est donc une application idempotente).

Exercice 4

On considère dans tout cet exercice l'application $f : \mathbb{C} \backslash \{i\} \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z} + i}$.

1. Soit $a \in \mathbb{C}^*$, alors $f(z) = a$ si $\dfrac{1}{\bar{z}+i} = a$, soit $\bar{z} + i = \dfrac{1}{a}$. En passant au conjugué, $z - i = \dfrac{1}{\bar{a}}$, soit $z = i + \dfrac{1}{\bar{a}}$. L'application f est bien bijective à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, et $f^{-1}(a) = i + \dfrac{1}{\bar{a}}$.
2. Calculons : $f(2) = \dfrac{1}{2+i} = \dfrac{2-i}{3} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}i$; $f(1+i) = \dfrac{1}{1-i+i} = 1$; $f^{-1}(2) = \dfrac{1}{2} + i$ et $f^{-1}(1+i) = i + \dfrac{1}{1-i} = i + \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$.
3. (a) Exprimons donc $f(z)$ sous forme algébrique : en posant $z = a+ib$, alors $f(z) = \dfrac{1}{a - ib + i} = \dfrac{1}{a + i(1-b)} = \dfrac{a + i(b-1)}{a^2 + (1-b)^2}$. Le dénominateur est un réel strictement positif (lorsque $z \neq i$ bien entendu). Le nombre $f(z)$ est donc réel si $b - 1 = 0$, soit $\mathrm{Im}\ (z) = 1$. Géométriquement, l'image de z doit être située sur la droite horizontale d'équation $y = 1$ dans le plan complexe.

   (b) En reprenant le calcul de la question précédente, $f(z) \in i\mathbb{R}$ si $a = 0$, c'est-à-dire si z lui-même est imaginaire pur. Pour avoir $f(z) \in \mathbb{U}$, on doit avoir $|z + i| = 1$, ce qui correspond à l'équation d'un cercle de centre $-i$ et de rayon 1 dans le plan complexe (pas besoin de développer puisque l'équation est déjà une équation de cercle sous cette forme !).
4. (a) Soit $z = a\lambda i$, avec $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$, alors $f(z) = \dfrac{1}{i(-\lambda + 1)} = \dfrac{i}{\lambda - 1}$. On obtient ainsi tout l'axe imaginaire pur, sauf l'origine du repère (qui correspondrait à $\lambda = 1$).

   (b) Si $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+i}$. Vérifions que cette image, appartient au cercle indiqué, en calculant sa distance au centre : $\left|\dfrac{1}{x+i} + \dfrac{i}{2}\right| = \left|\dfrac{2 + i(x+i)}{2(x+i)}\right| = \left|\dfrac{1+ix}{2x+2i}\right| = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{4x^2+4}} = \dfrac{1}{2}$. L'image de l'axe réel est donc incluse dans le cercle de centre $-\dfrac{i}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$. Réciproquement, supposons que z soit l'affixe d'un point de ce cercle, alors $z = -\dfrac{i}{2} + \dfrac{e^{i\theta}}{2}$, et $f^{-1}(z) = i + \dfrac{2}{e^{-i\theta}+i} = i + \dfrac{2}{\cos(\theta)+i(1-\sin(\theta))} = i + \dfrac{2(\cos(\theta)+i(\sin(\theta)-1))}{\cos^2(\theta)+(1-\sin(\theta))^2} = \dfrac{2\cos(\theta)+i(2-2\sin(\theta)+2\sin(\theta)-2)}{2-2\sin(\theta)} \in \mathbb{R}$. Tout point du cercle (sauf 0) a donc un antécédent dans $\mathbb{R}$, ce qui prouve que l'image de $\mathbb{R}$ est bien tout le cercle privé de l'origine.

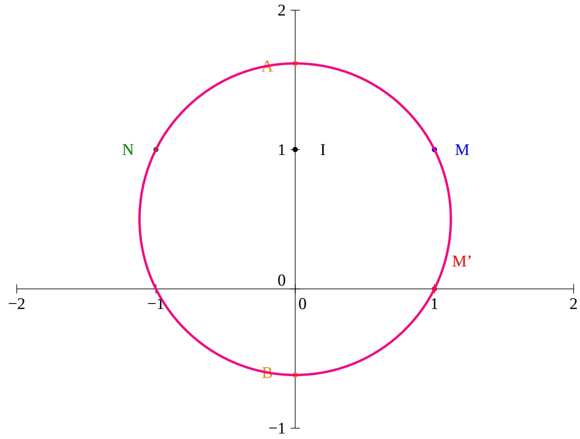
(c) Calculons donc : $f(e^{i\theta}) = \dfrac{1}{\cos(\theta)+i(1-\sin(\theta))} = \dfrac{\cos(\theta)-i(1-\sin(\theta))}{2(1-\sin(\theta))}$. La partie imaginaire de $f(z)$ vaut effectivement $-\dfrac{1}{2}$, et la partie réelle est égale à $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}$. Or, $\dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\theta}{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\frac{\theta}{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\theta}{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(\frac{\theta}{2})+\cos(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(\sin(\frac{\theta}{2})+\cos(\frac{\theta}{2}))(\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2}))}{(\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2}))^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos^2(\frac{\theta}{2})-\sin^2(\frac{\theta}{2})}{1-2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}$ en utilisant les formules de duplication. Ouf, ça marche ! Puisque $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)$ parcourt $\mathbb{R}$ lorsque θ varie dans $\mathbb{R}$ (privé des valeurs interdites), les images sont donc tous les de la droite sur laquelle $\text{Im }(z) = -\dfrac{1}{2}$ (droite horizontale d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$).

5. (a) Il s'agit de résoudre l'équation $\dfrac{1}{\bar{z}+i} = z$, soit $z\bar{z}+iz-1=0$. En posant $z = a+ib$, on trouve l'équation $a^2+b^2+ia-b-1=0$. La partie imaginaire qui s'annule impose $a=0$, ensuite on doit avoir en prenant la partie réelle $b^2-b-1=0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 5$, et admet pour racines $b_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $b_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On en déduit, avec les notations de l'énoncé, que $a = \dfrac{(1+\sqrt{5})i}{2}$, et $b = \dfrac{(1-\sqrt{5})i}{2}$.

(b) Surtout pas de calcul explicite, on ne s'en sortirait pas. Tout ce dont on a besoin, c'est de se rappeler que a et b sont tous deux solutions de l'équation $z\bar{z}+iz-1=0$, donc $ia-1=a\bar{a}$ et $ib-1=b\bar{b}$. On peut alors écrire : $\dfrac{b-f(z)}{a-f(z)} = \dfrac{b-\frac{1}{\bar{z}+1}}{a-\frac{1}{\bar{z}+1}} = \dfrac{b\bar{z}+bi-1}{a\bar{z}+ai-1} = \dfrac{b\bar{z}-b\bar{b}}{a\bar{z}-a\bar{a}} = \dfrac{b}{a} \times \dfrac{\bar{z}-\bar{b}}{\bar{z}-\bar{a}} = \dfrac{b}{a} \times \dfrac{b+\bar{z}}{a+\bar{z}}$, puisque a et b sont tous deux imaginaires purs, donc égaux à l'opposé de leur conjugué.

(c) Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour affixe $z-i = \dfrac{|z-i|}{\bar{z}+i}$, il est donc colinéaire (avec un rapport positif) au vecteur $\overrightarrow{OM'}$ qui a pour affixe $\dfrac{1}{\bar{z}+i}$.

(d) La question précédente n'a pas besoin d'être interprétée, c'est déjà fait ! Par contre, pour le b), il faut réfléchir un peu : le membre de gauche a pour argument $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$ (en notant A et B les points du plan d'affixes respectives a et b). Quant au membre de droite, comme le quotient $\dfrac{b}{a}$ est un nombre réel, son argument (modulo π, car le quotient en question est négatif) est égal à $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$, où N est le point du plan complexe d'affixe $-\bar{z}$, c'est-à-dire le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées. L'égalité des deux angles signifie exactement que les quatre points A, B, M' et N sont cocycliques (situés sur un même cercle), sauf si A, B et N sont alignés, auquel cas N' appartiendra simplement à la même droite qu'eux. Dans tous les cas, on obtient facilement N comme intersection de la demi-droite d'origine O dirigée par $\overrightarrow{IM}$, et du cercle circonscrit (ou de la droite) au triangle ABN. Ci-dessous, la construction géométrique pour $z = 1+i$ (dont on a calculé l'image plus haut). La demi-droite sur laquelle se situe le point M' est simplement l'axe réel (du côté des nombres positifs) dans ce cas.


2
A
N
1
I
M
M'
0
−2
−1
0
1
2
B
−1