Devoir Surveillé n°2

PTSI B Lycée Eiffel

9 novembre 2013

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Un petit fourre-tout pour vous entraîner sur les calculs :

1. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)^2$ (on factorisera le résultat).
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 2^n$.
3. Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$. En déduire une expression plus simple de $f(x)$ (on admettra sans le vérifier que $\mathcal{D}_f = [-1, 1[$).
4. On considère l'équation $z^3 + 2z^2 - 3iz - 1 - 3i = 0$. Déterminer un nombre réel solution de l'équation, puis la résoudre après l'avoir factorisée.

Exercice 2

On note dans tout l'exercice $\mathbb{U}_{11}$ l'ensemble des racines onzièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, et $a = e^{\frac{2i\pi}{11}}$.

1. Exprimer tous les éléments de $\mathbb{U}_{11}$ en fonction de a. Que vaut a^{11} ? Placer (approximativement) les images des éléments de $\mathbb{U}_{11}$ dans le plan complexe.
2. On pose $S = a + a^3 + a^4 + a^5 + a^9$ et $T = a^2 + a^6 + a^7 + a^8 + a^{10}$. Montrer que S et T sont deux nombres complexes conjugués.
3. Calculer $S + T$ et ST (qui sont des entiers simples).
4. En déduire les valeurs de S et T.
5. Montrer que $i\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) = \dfrac{a^3 - 1}{a^3 + 1}$ (on pourra utiliser les formules d'Euler). Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(-a^3)^k$, et comparer sa valeur à celle de $i\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right)$.
6. Vérifier que $4i\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = 2(a - a^{10})$.
7. Prouver que $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = i(T - S) = \sqrt{11}$.

Exercice 3

Soient A et B deux sous-ensembles fixés de $\mathbb{R}$, on définit alors une application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ C & \to & (C \cap A) \cup B \end{array} \right.$$

1. On suppose uniquement pour cette question que $A = \emptyset$. Que vaut alors $f(C)$?
2. On suppose uniquement pour cette question que $B = \mathbb{R}$. Que peut-on dire de f ? L'application f peut-elle être constante dans d'autres cas que les deux qu'on vient de citer ?
3. Dans le cas général, déterminer $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(\mathbb{R})$.
4. Montrer que, si $C \subset D$, alors $f(C) \subset f(D)$.
5. Montrer qu'un sous-ensemble E quelconque de $\mathbb{R}$ admet un antécédent par f si et seulement si $B \subset E \subset A \cup B$, et montrer dans ce cas que $f(E) = E$.
6. Déterminer tous les antécédents de A par f (en distinguant des cas si besoin), ainsi que tous ceux de B.
7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit constante.
8. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit surjective. Montrer qu'on aurait exactement la même condition pour que f soit injective.
9. Dans le cas général, que peut-on dire de $f \circ f$?

Exercice 4

On considère dans tout cet exercice l'application $f : \mathbb{C} \backslash \{i\} \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z} + i}$.

1. Montrer que f est bijective, et déterminer son application réciproque.
2. Calculer l'image par f de 2 et de $1+i$, ainsi que leurs antécédents (on donnera tous les résultats sous forme algébrique).
3. (a) Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$, donner une interprétation géométrique.
   (b) Même question pour $f(z) \in i\mathbb{R}$, puis pour $f(z) \in \mathbb{U}$.
4. (a) Déterminer l'image par f de l'axe imaginaire pur (privé de i).
   (b) Montrer que l'image par f de l'axe réel est le cercle de centre $A\left(-\dfrac{i}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$, privé de l'origine O.
   (c) Soit $z = e^{i\theta}$ (avec $\theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$), montrer que $f(z) = -\dfrac{i}{2} + \dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right)$. En déduire l'image par f du cercle trigonométrique privé de i.
5. (a) Déterminer les nombres complexes invariants par f. On notera a celui qui a la plus grande partie imaginaire, et b l'autre.
   (b) Montrer que, si $z \notin i\mathbb{R}$, $\dfrac{b - f(z)}{a - f(z)} = \dfrac{b}{a} \times \dfrac{b + \bar{z}}{a + \bar{z}}$.
   (c) En notant I l'image de i dans le plan complexe, M celle de z, et M' celle de $f(z)$, montrer que M' appartient à la demi-droite d'origine O dirigée par le vecteur $\overrightarrow{IM}$.
   (d) (pour les motivés) Donner une interprétation géométrique intelligente de ces deux résultats, et en déduire une façon de construire le point M' à partir du point M.