Devoir Surveillé n°10 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

20 juin 2014

Exercice 1

1. (a) Je noterai u_n le terme général de la série (S_n) pour toutes les premières questions de ce corrigé. Dans ce premier cas particulier, on a $u_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}$, ce qui correspond au terme général d'une série géométrique convergente. Plus précisément, la somme de (S_n) vaut $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

   (b) Si la suite est constante égale à a, on a de même $u_n = \frac{1}{a^{n+1}}$, avec $\frac{1}{a} < 1$ puisque a est un entier naturel non nul. On est toujours en présence d'une série géométrique, de somme $\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{1}{a}} = \frac{1}{a-1}$.

   (c) Dans ce cas, on aura $\prod_{k=0}^{n} p_k = \prod_{k=0}^{n} k+2 = (n+2)!$, donc $u_n = \frac{1}{(n+2)!}$. On reconnait le terme général d'une série exponentielle (à un décalage près), convergeant vers $e-2$ (il manque les deux premiers termes par rapport à la série exponentielle usuelle). On sait bien que $2 < e < 3$, donc $e - 2 \in]0,1[$.

   (d) Constatons simplement que $u_n = \prod_{k=0}^{n}(2k+2) = \prod_{k=0}^{n} 2(k+1) = 2^{n+1}\prod_{k=0}^{n}(k+1) = 2^{n+1}(n+1)!$, ce qui correspond à la valeur donnée pour l'inverse dans l'énoncé. On reconnait à nouveau pour (S_n) une série exponentielle, mais avec cette fois-ci une valeur de x égale à $\frac{1}{2}$, et un seul terme manquant par rapport à la série complète. On en déduit que la série a pour somme $e^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{e} - 1$. Comme $\sqrt{2} < \sqrt{e} < \sqrt{3}$, la valeur obtenue est bien dans l'intervalle $]0,1[$.

2. Dans tous les cas, la suite (p_n) étant croissante, on aura toujours $2 \leq p_n$, donc $u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. On en déduit que la série (S_n) est toujours à termes positifs et majorée par la série étudiée dans notre premier exemple, qui converge vers 1. Elle converge donc vers une somme positive (strictement car le premier terme de la série est strictement positif) et inférieure ou égale à 1.

3. Une fois fixée la valeur de p_0, la croissance de la suite (p_n) assure que $p_0 \leq p_n$ pour tout entier n, donc $u_n \leq \frac{1}{p_0^{n+1}}$. On reproduit en fait le même raisonnement que ci-dessus pour constater que, dans ce cas, $\frac{1}{p_0} < S(p) \leq \frac{1}{p_0 - 1}$ (la valeur maximale est obtenue quand la suite est constante égale à p_0, cas particulier étudié ci-dessus). En particulier, si une deuxième suite (q_n) vérifie $q_0 < p_0$, on aura nécessairement $S(p) < S(q)$ puisque $\frac{1}{p_0-1} \leq \frac{1}{q_0}$ (les nombres p_0 et q_0 étant entiers, on a nécessairement $q_0 \leq p_0 - 1$). Deux suites n'ayant pas le même premier

terme ne peuvent donc pas avoir la même image par S. Il faudrait généraliser ce résultat au cas où ce n'est pas le premier terme qui est différent, mais le n-ème, pour une valeur quelconque de n. C'est en fait le même principe : soient deux suites (p_n) et (q_n) distinctes, il existe donc (au moins) une valeur de n pour laquelle $p_n \neq q_n$. Notons n_0 cette valeur, et supposons par exemple $p_{n_0} > q_{n_0}$. La suite (p_n) étant croissante, $p_n \geq p_{n_0}$ pour toutes les valeurs de n supérieures ou égales à n_0. On en déduit (pour les mêmes valeurs de n) que $u_n \leq \dfrac{u_{n_0-1}}{p_{n_0}^{n-n_0+1}}$, puis que $S_n(p) < S_{n_0-1} + \dfrac{u_{n_0-1}}{p_{n_0}-1}$ (on a isolé les n_0 premiers termes de la somme pour lesquels la majoration précédente n'est pas valable). Or, les premiers termes de la somme associée à (q_n) sont les mêmes que ceux associés à (p_n) et par hypothèse $\dfrac{1}{p_{n_0-1}} \leq \dfrac{1}{q_{n_0}}$. On en déduit que $S_n(p) \leq S_{n_0-1}(q) + \dfrac{u_{n_0-1}}{q_{n_0}} = S_{n_0}(q)$. En passant à la limite, $S(p) \leq S_{n_0}(q) < S(q)$, ce qui achève de prouver l'injectivité de l'application S.

4. (a) Calculons donc : $y_0 = \dfrac{3}{7}$, donc $p_0 = \text{Ent}\left(1 + \dfrac{7}{3}\right) = 3$. Ensuite, $y_1 = 3y_0 - 1 = \dfrac{2}{7}$, et $p_1 = \text{Ent}\left(1 + \dfrac{7}{2}\right) = 4$. On continue : $y_2 = 4y_1 - 1 = \dfrac{1}{7}$ et $p_2 = \text{Ent}\,(1+7) = 8$. Allez, encore un tour : $y_3 = 8y_2 - 1 = \dfrac{1}{7}$. Ah, pas la peine d'aller plus loin, ça va boucler, on aura toujours $y_n = \dfrac{1}{7}$ et $p_n = 8$ pour $n \geq 2$. On a donc (en reprenant toujours les mêmes notations) $u_0 = \dfrac{1}{3}$, $u_1 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$ puis, $\forall k \geq 2$, $u_k = \dfrac{1}{12} \times \dfrac{1}{8^{k-1}}$ (en fait, cette formule est aussi valable lorsque $k = 1$). La série de terme général (u_n) converge évidemment, et $S(p) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{8^{k-1}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{8}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{84} = \dfrac{28+8}{84} = \dfrac{3}{7}$. Incroyable, $S(p) = x$. Ca ne peut pas être un hasard !

   (b) D'après la définition de la partie entière, on a toujours $\dfrac{1}{y_n} < p_n \leq 1 + \dfrac{1}{y_n}$, donc $1 < p_n y_n \leq y_n + 1$ et $0 < y_{n+1} \leq 1$. En fait, pour être tout à fait rigoureux, il faut faire une récurrence puisqu'on a besoin d'avoir $y_n \geq 0$ pour que les inégalités ne changent pas de sens.

   (c) La suite (p_n) est évidemment une suite d'entiers naturels puisqu'elle est définie comme partie entière d'un nombre positif. Comme (y_n) est décroissante, $\left(1 + \dfrac{1}{y_n}\right)$ est croissante, et (p_n) également (la partie entière est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$). Enfin, $1 + \dfrac{1}{y_0} \geq 2$ puisque $y_0 \leq 1$, donc $p_0 \geq 2$.

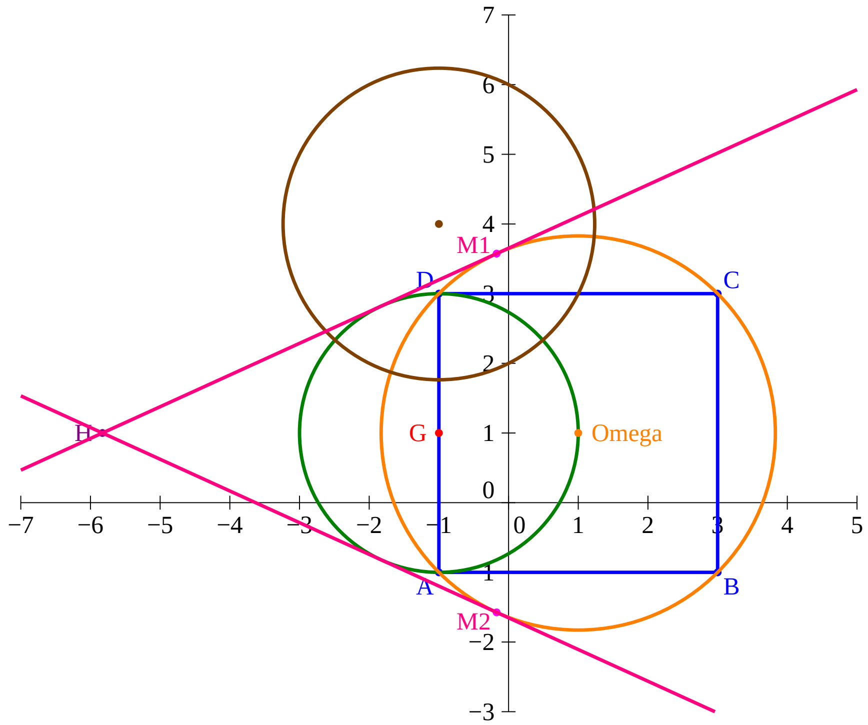
   (d) Il suffit de retourner la relation donnant y_{n+1} en fonction de y_n pour trouver $y_n = \dfrac{1}{p_n} + \dfrac{y_{n+1}}{p_n}$. On peut alors obtenir successivement différentes expressions de x : $x = y_0$ (par définition) puis $x = \dfrac{1}{p_0} + \dfrac{y_1}{p_0}$, puis $x = \dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{p_0p_1} + \dfrac{y_2}{p_0p_1}$. On conjecture que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{p_0 \cdots p_k} + \dfrac{y_n}{p_0 \cdots p_{n-1}}$. Reste à le prouver facilement par récurrence : l'initialisation est vraie, et on passe du rang n au rang $n+1$ en remplaçant $\dfrac{y_n}{p_0 \cdots p_{n-1}}$ par $\dfrac{1}{p_0 \cdots p_{n-1}} \times \left(\dfrac{1}{p_n} + \dfrac{y_{n+1}}{p_n}\right)$. Autrement dit, $x = S_{n-1}(p) + \dfrac{y_n}{p_0 \cdots p_n}$. Si on fait tendre n vers $+\infty$, le membre de droite converge vers $S(p)$ (le terme supplémentaire est majoré en valeur absolue par $\dfrac{1}{p_0 \cdots p_n} \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$, qui tend vers 0). On vient de créer, pour tout nombre

$x \in]0,1]$ une suite (p_n) telle que $S(p) = x$, ce qui prouve la surjectivité de l'application S. Puisqu'on a déjà prouvé qu'elle était injective, S est donc bijective.

Exercice 2

A. Un exemple.

1. Allons-y pour la figure :



2. Pour prouver que c'est un carré, on peut par exemple calculer $AB = BC = CD = DA = 2$ (non, je ne détaille pas), et ajouter le fait que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ (ce que je ne détaille pas non plus. En faisant la moyenne des coordonnées de A et de D, on trouve $G(-1, 1)$.
3. Notons donc $M(x, y)$. On calcule alors $\overrightarrow{MA} = (-1 - x, -1 - y)$, $\overrightarrow{MB} = (3 - x, -1 - y)$ et $\overrightarrow{MC} = (3 - x, 3 - y)$, puis $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (-2 - 2x, 2 - 2y)$. La norme de ce vecteur vaut donc $\sqrt{(-2 - 2x)^2 + (2 - 2y)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y + 8}$. Comme $\overrightarrow{AB} = 2$, notre ensemble $\mathcal{E}$ a donc pour équation, en élevant au carré, $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 8 = 0$, il ne reste plus qu'à tout diviser par 4 pour retrouver l'équation de l'énoncé. On reconnait bien sûr une équation de cercle : $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$, ce qui correspond au cercle de rayon 2 et de centre G (qui est accessoirement le cercle de diamètre $[AD]$).
4. Inutile de faire de gros calculs, le triangle ABC étant un demi-carré, son cercle circonscrit a pour centre le milieu de $[AC]$ (ou si on préfère le centre du carré $ABCD$), soit le point $\Omega(1, 1)$. Le rayon du cercle est $\Omega A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Une équation du cercle est donc $(x-1)^2+(y-1)^2 = 8$, soit $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$.
5. Normalement, on devrait trouver les points A et D comme points d'intersection, vérifions quand même. En soustrayant les deux équations de cercle, on trouve la condition $4x + 4 = 0$, soit $x = -1$. Reportons dans l'équation du deuxième cercle : $y^2 - 2y - 3 = 0$. Le réel $y = 1$ est solution évidente de cette équation du second degré l'autre solution est $y = 3$. Les deux points d'intersection recherchés sont bien A et D.
6. Cherchons donc les points d'intersection entre les tangentes issues de H au cercle $\mathcal{C}$, et le cercle. Autrement dit, on cherche les points $M(x, y)$ vérifiant l'équation de cercle $x^2 + y^2 -$

$2x-2y-6=0$, et tels que $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{\Omega M}=0$, soit $(x+3+2\sqrt{2})(x-1)+(y-1)^2=0$. Développons brutalement : $x^2+y^2+(2+2\sqrt{2})x-2y-2-2\sqrt{2}=0$. On soustrait les deux équations : $(4+2\sqrt{2})x+4-2\sqrt{2}=0$. On obtient donc directement, en simplifiant tout par 2, $x=\dfrac{\sqrt{2}-2}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{-(2-\sqrt{2})^2}{4-2}=\dfrac{-6+4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}-3$. Il ne reste plus qu'à remplacer dans la joie et la bonne humeur dans une des équations précédentes, de préférence celle obtenue avec le produit scalaire : $4\sqrt{2}(2\sqrt{2}-4)+(y-1)^2=0$, soit $(y-1)^2=16\sqrt{2}-16=16(\sqrt{2}-1)$, et donc $y-1=\pm 4\sqrt{\sqrt{2}-1}$. On en déduit les deux valeurs possibles de l'ordonnée : $y=1+4\sqrt{\sqrt{2}-1}$, et $y=1-4\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Les deux points de tangence cherchés sont donc $M_1(2\sqrt{2}-3,1+4\sqrt{\sqrt{2}-1})$, et $M_2(2\sqrt{2}-3,1-4\sqrt{\sqrt{2}-1})$. Il reste à déterminer les équations des droites (HM_1) et (HM_2). Pour cela, il est peut-être plus facile d'utiliser des méthodes « lycée », en commençant par déterminer le coefficient directeur $a=\dfrac{y_{M_1}-y_H}{x_{M_1}-x_H}=\dfrac{4\sqrt{\sqrt{2}-1}}{4\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$. Bien, pour l'ordonnée à l'origine, on part du fait que $ax_H+b=y_H$, soit $b=y_H-ax_H=1+(3+2\sqrt{2})\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}=1+3\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}$, soit une superbe équation de droite : $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}x+1+3\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}$. La deuxième tangente a un coefficient directeur opposé, et vérifie donc $b=y_H+ax_H=1-3\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}$, soit pour l'équation de la tangente $y=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}x+1-3\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Reste à prouver que ces deux droites sont aussi tangentes à l'autre cercle $\mathcal{E}$. Pas de méthode triviale pour cela, alors on va tout simplement chercher les tangentes à $\mathcal{E}$ issues de H par la même méthode que ci-dessus, et vérifier que les équations sont les mêmes (le coefficient directeur suffira puisque toutes droites passent évidemment par H. Les points de tangente $M(x,y)$ vérifient d'une part l'équation de cercle $x^2+y^2+2x-2y-2=0$, d'autre part la condition $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{GM}=0$, soit $(x+2\sqrt{2}+3)(x+1)+(y-1)^2=0$, ou encore $x^2+y^2+(2\sqrt{2}+4)x-2y+2\sqrt{2}+4=0$. On soustrait les deux équations pour obtenir $(2\sqrt{2}+2)x+2\sqrt{2}+6=0$, soit $x=-\dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+1}=-\dfrac{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)}{2-1}=1-2\sqrt{2}$. En reportant dans l'équation du produit scalaire, $4(2-2\sqrt{2})+(y-1)^2=0$, donc $(y-1)^2=8(\sqrt{2}-1)$, et $y=1\pm 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}$. On obtient ainsi comme pente pour la première tangente $\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{4}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$. Incroyable, ça marche !

B. Cercles orthogonaux.

Deux cercles du plan de rayons respectifs R_1 et R_2 et de centres respectifs O_1 et O_2 sont dits orthogonaux si $O_1O_2^2=R_1^2+R_2^2$.

1. Puisque $(R_1+R_2)^2=R_1^2+R_2^2+2R_1R_2>R_1^2+R_2^2=O_1O_2^2$, on a $O_1O_2<R_1+R_2$. De même, $(R_1-R_2)^2=R_1^2+R_2^2-2R_1R_2<O_1^2O_2^2$, donc $|R_1-R_2|<O_1O_2$. Ces deux conditions assurent que les deux cercles ont deux points d'intersection.
2. La condition d'orthogonalité des deux cercles est équivalent à dire que le triangle PO_1O_2 est rectangle en P (un résultat obscur appelé théorème de Pythagore), auquel cas les tangentes en P aux deux cercles sont les droites (OP_1) et (OP_2), qui sont bien orthogonales (et la réciproque est également vraie).
3. On sait que les rayons des deux cercles sont 2 et $2\sqrt{2}$, et le carré de la distance entre leur centre vaut $G\Omega^2=4$. Comme 4 n'est pas vraiment égal à $4+8$, les deux cercles ne sont pas du tout orthogonaux.

4. Soyons violents et notons (x, y) les coordonnées du centre d'un tel cercle, et r son rayon. On doit avoir d'une part, $(x-1)^2+(y-1)^2 = 8+r^2$ (orthogonalité avec le cercle $\mathcal{E}$), et d'autre part $(x+1)^2+(y-1)^2 = 4+r^2$. En développant, on trouve donc les conditions $x^2+y^2-2x-2y-6-r^2 = x^2+y^2+2x-2y-2-r^2 = 0$. La soustraction des deux équations donne $x=-1$, et on reste alors avec la condition $(y-1)^2 = 4+r^2$. Il existe en fait une infinité de cerckes convenables puisque toutes les valeurs de y pour lesquelles $(y-1)^2-4>0$ donnent une valeur de r possible (une seule, le rayon devant quand même être positif). C'est le cas si $y \in]-\infty, -1[\cap]3, +\infty[$. Par exemple, pour $y=4$, on obtient $r^2=5$, soit $r=\sqrt{5}$ (c'est le seul cercle représenté sur ma figure, en marron).
5. Avec les conditions données, les deux cercles ont pour centres respectifs (a, b) et (d, e), donc, en reprenant les notations précédentes, $O_1O_2^2 = (d-a)^2+(e-c)^2$. Pour les rayons, il vaut mieux factoriser les équations : la première devient $(x-a)^2+(y-b)^2 = c+a^2+b^2$, soit un carré du rayon égal à $c+a^2+b^2$. De même, $R_2^2 = f+d^2+e^2$. La condition d'orthogonalité s'écrit donc $(d-a)^2+(e-c)^2 = c+f+a^2+b^2+c^2+d^2$, soit en développant et en simplifiant brutalement, $-2ad-2ec = c+f$, ou encore $c+f-2(ad+ce) = 0$.