Devoir Surveillé n°10

PTSI B Lycée Eiffel

20 juin 2014

Durée : 1H45. Calculatrices interdites.

Exercice 1

On note dans cet exercice E l'ensemble de toutes les suites (p_n) croissantes (mais pas forcément strictement) d'entiers naturels telles que $p_0 \geq 2$. Pour une suite (p_n) appartenant à E, on s'intéresse à la série (S_n) de terme général $\dfrac{1}{p_0 \dots p_n}$. Autrement dit, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\prod_{i=0}^{k} p_i}$.

1. Commençons par étudier quelques cas particuliers :
   (a) Dans le cas où la suite (p_n) est constante égale à 2, reconnaitre la série (S_n), et en déduire sa convergence, ainsi que la valeur de sa somme.
   (b) Généraliser au cas d'une suite (p_n) constante égale à n, pour un certain entier naturel $n \geq 2$.
   (c) Supposons désormais que $p_n = n + 2$, reconnaître à nouveau la série (S_n), et prouver sa convergence vers une somme à déterminer. Vérifier que cette somme appartient à l'intervalle $]0, 1]$.
   (d) En supposant désormais que $p_n = 2n + 2$, prouver que le terme général de la série (S_n) est égal à $\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$, en déduire la convergence et la somme de la série (S_n). Vérifier à nouveau que la somme appartient à $]0, 1]$.
2. Dans le cas général, prouver que la série (S_n) est toujours convergente, et que sa somme appartient à $]0, 1]$. On notera désormais $S(p)$ la somme de la série associée à la suite $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que l'application $S : E \rightarrow]0, 1]$ est une application injective (on pourra commencer par constater que, si $p_0 > q_0$, alors $S(p) < S(q)$).
4. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1]$. On construit à partir de x la suite (y_n) de la façon suivante : $y_0 = x$ et $\forall n \geq 1$, $y_{n+1} = p_n y_n - 1$, où $p_n = \text{Ent}\left(1 + \dfrac{1}{y_n}\right)$.
   (a) Déterminer les premiers termes des suites (y_n) et (p_n) lorsque $x = \dfrac{3}{7}$ (calculez jusqu'à ce qu'il se produise quelque chose de remarquable, ce qui devrait arriver vite). Calculer $S(p)$ pour la suite (p_n) ainsi obtenue.
   (b) Dans le cas général, montrer que (y_n) est une suite décroissante d'éléments de $]0, 1]$.
   (c) En déduire que (p_n) vérifie toujours les hypothèses posées en début d'exercice.
   (d) Exprimer x en fonction de p_0, p_1, …, p_n et y_n, et en déduire la valeur de $S(p)$ lorsque $p = (p_n)$. Conclure que S est une application bijective de E dans $]0, 1]$.

Exercice 2

A. Un exemple.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les quatre points $A(-1,-1)$, $B(3,-1)$, $C(3,3)$ et $D(-1,3)$. On notera également G le milieu du segment $[AD]$.

1. Faire une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
2. Montrer que $ABCD$ est un carré, et déterminer les coordonnées de G.
3. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan vérifiant $\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{AB} \|$. Montrer que $\mathcal{E}$ admet pour équation $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$, et reconnaitre l'ensemble $\mathcal{E}$.
4. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC. On donnera les coordonnées de son centre Ω.
5. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{E}$.
6. On note $H(-3-2\sqrt{2}, 1)$. Déterminer l'équation des tangentes à $\mathcal{C}$ issues du point H, et vérifier que ces tangentes sont également tangentes à $\mathcal{E}$.

B. Cercles orthogonaux.

Deux cercles du plan de rayons respectifs R_1 et R_2 et de centres respectifs O_1 et O_2 sont dits orthogonaux si $O_1O_2^2 = R_1^2 + R_2^2$.

1. Montrer que deux cercles orthogonaux se coupent nécessairement en deux points P et Q.
2. Montrer que deux cercles sécants en P sont orthogonaux si et seulement si les tangentes aux deux cercles passant par P sont orthogonales (on fera une figure pour illustrer).
3. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ de la première partie sont-ils orthogonaux ?
4. Déterminer tous les cercles du plan qui sont simultanément orthogonaux à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{E}$ (on les tracera bien entendu sur la figure de la première partie).
5. Si deux cercles ont pour équations respectives $x^2 + y^2 - 2ax - 2by - c = 0$ et $x^2 + y^2 - 2dx - 2ey - f = 0$, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients a, b, c, d, e et f pour que les cercles soient orthogonaux.