Devoir Surveillé n°1

PTSI B Lycée Eiffel

28 septembre 2013

Durée : 3H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x - 4\sqrt{x} \geq -3$
2. $|x^2 - 1| = |x - 2| - 1$
3. $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$
4. $\ln(|x^2 + 2x|) < \ln(3)$

Exercice 2

On considère les fonctions f et g définies par les équations $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1 + \ln(x)}{x}$ et $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et de g.
2. Étudier les variations de la fonction g, en déduire le signe de g.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est aymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (on rappelle qu'il suffit pour cela de prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \dfrac{x}{2} = 0$).
5. Déterminer la position relative de la droite (D) et de la courbe de f.
6. Étudier les variations de la fonction f (on pourra réutiliser les résultats de la question 2).
7. Résoudre l'équation $f'(x) = \dfrac{1}{2}$. En déduire les points de la courbe où les tangentes sont parallèles à (D).
8. Tracer dans un même repère ces tangentes, la droite (D) et une allure de la courbe représentative de f.

Problème

Nous allons dans ce problème définir et tenter d'étudier les propriétés élémentaires d'une nouvelle fonction hyperbolique : la fonction **tangente hyperbolique** ou th définie par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

.

I. Étude de la fonction th.

1. Montrer que th est définie sur $\mathbb{R}$ et que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Déterminer la parité de th.
2. Calculer la dérivée de la fonction th, et vérifier que $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$. En déduire le tableau de variations de th et prouver qu'elle est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à préciser.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction th en son point d'abscisse 0, puis donner une allure de la courbe.
4. Simplifier, pour un réel x quelconque, l'expression de $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)$ ainsi que celle de $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$. En déduire que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y))$, et $\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(y))$.
5. À l'aide des résultats de la question précédente, exprimer $\operatorname{sh}(x+y)$ et $\operatorname{ch}(x+y)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sh}(y)$, $\operatorname{ch}(y)$ et $\operatorname{sh}(y)$.
6. Démontrer que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$.

II. Réciproque de la fonction th.

On note Argth la fonction réciproque de la fonction th, définie sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Donner sans aucun calcul une allure de la courbe représentative de Argth, si possible dans le même repère que celle de la question $I.3$.
2. À l'aide de la formule de dérivation d'une réciproque, calculer la dérivée de la fonction Argth.
3. Soit $x \in I$ et $y = \operatorname{Argth}(x)$. Montrer que $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$, et en déduire une expression de Argth à l'aide de la fonction ln. Vérifier avec cette nouvelle expression que votre dérivée de Argth est correcte.
4. On considère désormais la fonction f définie par $f(x) = \operatorname{Argth}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{\operatorname{ch}(x)+1}}\right)$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) En posant $y = \operatorname{ch}(x)$, montrer que $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(y + \sqrt{y^2-1})$.
   (c) En déduire que $f(x) = \dfrac{|x|}{2}$.

III. Une équation fonctionnelle. (si vous avez le temps...)

On cherche maintenant toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

.

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème.
2. Montrer que la fonction th est une solution du problème.
3. Soit f une solution, quelle sont les valeurs possibles pour $f(0)$?
4. Vérifier que, si f est solution, $-f$ également, et $g : x \mapsto f(kx)$ également (quelle que soit la valeur de $k \in \mathbb{R}$).
5. Montrer que toutes les valeurs prises par la fonction f sont comprises entre -1 et 1.

On peut prouver que les fonctions solutions (outre les constantes) sont uniquement les fonctions de la forme $x \mapsto \operatorname{th}(kx)$, mais c'est un peu trop compliqué pour cette fois-ci, alors on s'arrêtera là !