Devoir Maison n°9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

28 avril 2014

Problème

Problème 1

Première partie : calcul matriciel.

1. On calcule donc $M^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ puis $M^3 = \begin{pmatrix} 32 & 36 & 24 \\ 24 & 16 & 24 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$. Ne reste plus qu'à effectuer $M^3 - 4M^2 - 4M + 16I = \begin{pmatrix} 32-40-8+16 & 36-24-12+0 & 24-24-0+0 \\ 24-16-8+0 & 16-32-0+16 & 24-16-8+0 \\ 8-8-0+0 & 12-8-4+0 & 16-24-8+16 \end{pmatrix} = 0$.

2. On peut écrire la relation sous la forme $-\frac{1}{16}M^3 + \frac{1}{4}M^2 + \frac{1}{4}M = I$, soit $M\left(-\frac{1}{16}M^2 + \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}I\right) = I$. Cela prouve que la matrice M est inversible, d'inverse $M^{-1} = -\frac{1}{16}M^2 + \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

3. Constatons que 2 est racine de l'équation : $2^3 - 4 \times 2^2 - 4 \times 2 + 16 = 8 - 16 - 8 + 16 = 0$. On peut donc factoriser sous la forme $(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$. Par identification, on doit avoir $a = 1$, $b - 2a = -4$ soit $b = -2$ et $c - 2b = -4$, soit $c = -8$, donc $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = (x-2)(x^2-2x-8)$. Ce dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 4+32 = 36$, il admet deux racines $x_1 = \frac{2+6}{2} = 4$, et $x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$. Il y a donc au total trois solutions à l'équation : -2, 2 et 4.

4. En utilisant la question précédente et le résultat de la première question, on a donc $(M - 2I)(M^2 - 2M - 8I) = 0$. Si $M - 2I$ était inversible, on pourrait multiplier à gauche par son inverse pour obtenir $M^2 - 2M - 8I = 0$. Or ce n'est pas le cas (le premier coefficient en haut à gauche de la matrice $M^2 - 2M - 8I$ vaut -2, donc la matrice n'est pas nulle). La matrice $M - 2I$ ne peut donc pas être inversible.

5. Essayons donc d'appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 4L_1 - L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 2L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/12 \\ L_2 \leftarrow L_2/12 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

La matrice est bien inversible, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

6. Encore du calcul passionnant, mieux vaut commencer par la droite : $MP = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 8 & 8 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. Une petite récurrence pour la route : $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I = M^0$, et surtout $PDP^{-1} = P(P^{-1}MP)P^{-1} = (PP^{-1})M(PP^{-1}) = M$. Supposons la propriété vérifiée au rang n, on a alors $M^{n+1} = M^m \times M = (PD^nP^{-1}) \times (PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve la propriété au rang suivant. Il suffit donc de calculer PD^nP^{-1} : $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$; puis $PD^n = \begin{pmatrix} 3 \times 4^n & 3 \times (-2)^n & -2^n \\ 2 \times 4^n & -4 \times (-2)^n & 0 \\ 4^n & (-2)^n & 2^n \end{pmatrix}$, et enfin

$$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4^n}{2} + (-2)^{n-2} + 2^{n-2} & \frac{4^n}{2} - (-2)^{n-1} & \frac{4^n}{2} + (-2)^{n-2} - 3 \times 2^{n-2} \\ \frac{4^n}{3} - \frac{(-2)^n}{3} & \frac{4^n}{3} + \frac{(-2)^{n+1}}{3} & \frac{4^n}{3} - \frac{(-2)^n}{3} \\ \frac{4^n}{6} + \frac{(-2)^{n-2}}{3} - 2^{n-2} & \frac{4^n}{6} - \frac{(-2)^{n-1}}{3} & \frac{4^n}{6} + \frac{(-2)^{n-2}}{3} + 3 \times 2^{n-2} \end{pmatrix}$$

Deuxième partie : un problème de probabilités.

1. Puisque le préparationnaire a mangé un hamburger au jour 0, l'énoncé nous donne directement $a_1 = \dfrac{3}{4}$, $b_1 = 0$ et $c_1 = \dfrac{1}{4}$. Pour le jour 2, il devient nécessaire d'appliquer la formule des

probabilités totales, par exemple $a_2 = P_{A_1}A_2 \times a_1 + P_{B_1}A_2 \times b_1 + P_{C_1}A_2 \times c_1 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times 0 + 0 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$. De même, $b_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; et $c_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

2. Les trois événements formant un système complet, on aura toujours $a_n + b_n + c_n = 1$.
3. On cherche donc à calculer $P_{B_2}(A_1)$, ce qui se calcule bien à l'aide de la formule de Bayes : $P_{B_2}(A_1) = \dfrac{P(A_1) \times P_{A_1}(B_2)}{P(B_2)} = \dfrac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$.
4. On applique en effet simplement la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements A_n, B_n, C_n, pour obtenir $a_{n+1} = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}b_n + 0c_n$. Les deux autres relations s'obtiennent de façon similaire.
5. Il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
6. La formule se démontre par une récurrence facile : $A^0X_0 = IX_0 = X_0$, et en supposant $X_n = A^nX_0$, alors d'après la question précédente $X_{n+1} = AX_n = A(A^nX_0) = A^{n+1}X_0$.
7. On constate que $A = \frac{1}{4}M$, donc $A^n = \frac{1}{4^n}M^n$, et $U_n = \frac{1}{4^n}M^nU_0 = \frac{1}{4^n}M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il suffit donc de prendre la deuxième colonne de M^n et la diviser par 4^n pour obtenir $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; $b_n = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; et $c_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
8. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{6}$.
9. La moyenne des calories mangées au repas n peut être calculée en pondérant les valeurs par les probabilités calculées plus haut, ce qui donne $\frac{3}{2}a_n + 3b_n + 2c_n = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{25}{12} - \frac{11}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. On a donc une limite égale à $\frac{25}{12}$, soit légèrement supérieure à 2. On peut donc considérer que notre préparationnaire ne mange pas tout à fait équilibré, mais que ça devrait être compensé par un surcroit d'activité cérébrale pour ses révisions du prochain DS de maths.

Exercice

1. En utilisant les notations introduites dans la question 3 de l'énoncé, on a ici $P(M_1) = P(M_2) = p$, et le comportement des deux moteurs étant indépendant, $P(M_1 \cap M_2) = p \times p = p^2$. On en déduit que $P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) + P(M_2) - P(M_1 \cap M_2) = 2p - p^2 = p(2 - p)$.
2. Puisque l'avion à deux moteurs s'écrase dès qu'au moins l'un des deux moteurs tombe en panne, $P(A) = P(\overline{M_1 \cup M_2}) = 1 - p(2 - p)$.
3. L'avion s'écrase dès qu'au moins deux des moteurs tombent en panne, soit $B = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \cup (M_1 \cap M_4) \cup (M_2 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_4) \cup (M_3 \cap M_4)$.
4. On peut bien sûr appliquer la formule de Poincaré à l'union précédente, mais comme elle est composée de six événements, ça risque d'être très lourd (en fait, beaucoup d'intersections sont vides, ce qui rend le calcul possible). Essayons une autre approche, en notant B_2 l'événement « Deux moteurs **exactement** parmi les quatre tombent en panne pendant le vol » ; et similairement pour B_3 et B_4. On a alors assez clairement $B = B_2 \cup B_3 \cup B_4$ (union disjointe puisqu'on a précisé exactement le nombre de moteurs tombant en panne). Or, $P(B_4) = p^4$ (chaque moteur

tombe en panne, indépendamment les uns des autres), $P(B_3) = 4p^3(1-p)$ (en effet, on a par exemple $P(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M_4}) = p \times p \times p \times (1-p) = p^3(1-p)$, et il faut encore choisir quel moteur parmi les quatre va survivre). Enfin, pour deux moteurs exactement, il y a $\binom{4}{2} = 6$ façons de choisir les deux moteurs qui vont tomber en panne, donc $P(B_2) = 6p^2(-1-p)^2$. Finalement, $P(B) = p^4 + 4p^3(1-p) + 6p^2(1-p)^2$.

5. Calculons donc $P(A) - P(\overline{B}) = 1 - 2p(1-p) - 1 + p^4 + 4p^3(1-p) + 6p^2(1-p) = 2p + p^2 + p^4 + 4p^3 - 4p^4 + 6p^2 - 12p^3 + 6p^4 = p(2 + 7p - 8p^2 + 3p^3)$. La parenthèse a pour racine évidente $p = 1$, on peut donc factoriser $2 + 7p - 8p^2 + 3p^3 = (p-1)(ap^2 + bp + c) = ap^3 + (b-a)p^2 + (c-b)p + c$, dont on déduit $a = 3$, $b - a = -8$ et $c - b = 7$, donc $b = -5$ et $c = 2$. On obtient $P(A) - P(\overline{B}) = p(p-1)(3p^2 - 5p + 2)$. La dernière parenthèse a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et admet deux racines $p_1 = \dfrac{5+1}{6} = 1$ et $p_2 = \dfrac{5-1}{6} = \dfrac{2}{3}$. Conclusion de ce passionnant calcul : $P(A) - P(\overline{B}) = 3p(p-1)^2\left(p - \dfrac{2}{3}\right)$. On peut alors faire le tableau de signes suivant :

p		0		$\frac{2}{3}$		1	
$(1-p)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$p - \frac{3}{2}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$P(A) - P(\overline{B})$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

6. On constate que, pour les valeurs 0 et 1, $P(A) = P(\overline{B})$, ce qui signifie que les deux moteurs ont la même probabilité de s'écraser en vol. C'est logique puisque, lorsque $p = 0$, les moteurs ne tombent jamais en panne (peu importe combien il y en a, on arrivera toujours à bon port) ; et au contraire lorsque $p = 1$, tous les moteurs tomberont systématiquement en panne, et l'avion, à deux moteurs comme à quatre, coulera.

7. Au vu du tableau de signe précédent, lorsque $p \leq \dfrac{2}{3}$, $P(A) < P(\overline{B})$, donc l'avion à deux moteurs est moins fiable que l'avion à quatre moteurs, il est préférable d'opter pour le quadrimoteur. Par contre, si $p \geq 23$, et en supposant qu'on tienne encore à effectuer le voyage, il vaudra mieux prendre l'avion à deux moteurs (dans ce cas, on aura moins d'une chance sur neuf d'arriver vivant).

8. Notons C l'événement « L'avion à six moteurs s'écrase comme une merde au beau milieu de l'Atlantique ». On peut calculer $P(C)$ de la même façon qu'on a calculé $P(B)$: on a au choix exactement trois, quatre, cinq ou six moteurs qui vont tomber en panne, et qu'il faut choisir parmi les six moteurs de l'avion. On obtient alors $P(C) = \binom{6}{3} \times p^3 \times (1-p)^3 + \binom{6}{4} \times p^4 \times (1-p)^2 + \binom{6}{5} \times p^5 \times (1-p) + p^6 = 20p^3(1 - 3p + 3p^2 - p^3) + 15p^4(1 - 2p + p^2) + 6p^5(1-p) + p^6 = 20p^3 - 60p^4 + 60p^5 - 20p^6 + 15p^4 - 30p^5 + 15p^6 + 6p^5 - 6p^6 + p^6 = 20p^3 - 45p^4 + 36p^5 - 10p^6$. On peut enchaîner sur le calcul de $P(B) - P(C) = 6p^2 - 8p^3 + 3p^4 - 20p^3 + 45p^4 - 36p^5 + 10p^6 = p^2(6 - 28p + 48p^2 - 36p^3 + 10p^4)$. Factoriser le polynôme de degré 4 de la parenthèse ne donne pas très envie, mais on sait déjà que 1 doit en être une racine évidente (l'argument probabiliste de la question 6 tient toujours). En effet c'est le cas, donc $10p^4 - 36p^3 + 48p^2 - 28p + 6 = (p-1)(ap^3 + bp^2 + cp + d) = ap^4 + (b-a)p^3 + (c-b)p^2 + (d-c)p + d$. On a donc $a = 10$, puis $b - a = -36$, donc $b = -26$; $c - b = 48$ soit $c = 22$; et enfin $d - c = -28$ donc $d = -6$, soit $P(B) - P(C) = p^2(p-1)(10p^3 - 26p^2 + 22p - 6)$. Encore un polynôme de degré 3 dans la parenthèse, c'est ballot. Mais gros coup de pot, 1 est encore racine évidente ! On retourne factoriser dans la joie et la bonne humeur : $10p^3 - 26p^2 + 22p - 6 = (p-1)(ep^2 + fp + g) = ep^3 + (f-e)p^2 + (g-f)p - g$, dont on déduit $e = 10$, $f - e = -26$ donc $f = -16$ et $g - f = 22$ donc $g = 6$. On progresse : $P(B) - P(C) = p^2(p-1)^2(10p - 16p + 6)$. Les plus observateurs remarqueront que 1 est encore et toujours racine évidente (jamais deux sans trois) mais on peut plus prosaïquement calculer son petit discriminant $\Delta = 256 - 240 = 16$ (oui, on pouvait aussi

tout factoriser par 2 avant le calcul, je sais ; ou même utiliser le petit truc du discriminant réduit que je vous ai présenté aux alentours du 15 septembre et que vous avez donc tous sereinement oublié depuis). Bref, il y a deux racines $p_1 = \dfrac{16+4}{20} = 1$ (je vous l'avais dit !) et $p_2 = \dfrac{16-4}{20} = \dfrac{3}{5}$. On est arrivés : $P(B) - P(C) = p^2(p-1)^3\left(p - \dfrac{3}{5}\right)$.

Un tableau de signe très très similaire à celui fait un peu plus haut (les paresseux ne feront même pas de tableau de signe en isolant les facteurs positifs p^2 et $(p-1)^2$, gardant le signe du trinome qu'on vient d'étudier) montrer que, si $p \leq \dfrac{3}{5}$, $P(B) \geq P(C)$, ce qui prouve que l'avion à six moteurs est le meilleur (on avait déjà vu que le quatre moteurs battait le deux moteurs dans cette zone). Pour $p \geq 35$, le quatre moteurs est mieux. Autrement dit, jusqu'à $p = \dfrac{3}{5}$, il faut six moteurs ; entre $\dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{2}{3}$, quatre c'est mieux ; et au-delà de $\dfrac{2}{3}$, il faut se résoudre à placer nos maigres espoirs de survie dans l'avion à deux moteurs. On peut conjecturer que, si on s'amusait à continuer les calculs avec des avions avec huit, dix moteurs etc., on obtiendrait des zones de plus en plus proches de $p = 0$ dans lesquelles ces nouveaux avions seraient meilleurs que les précédents. Allez, on fait le calcul avec huit moteurs pour voir ! Non, vous ne voulez pas ? Vraiment ? Et si on ajoute un nombre de pilotes égal au nombre de moteurs, chacun étant bourré au point d'avoir une probabilité q de faire crasher l'avion ? Non plus ? Pfff, ces jeunes, ils ne savent plus s'amuser...