# Devoir Maison n°9

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 28 avril 2014

## Problème

### Première partie : calcul matriciel.

On considère dans cette partie les matrices $M$ et $P$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On notera par ailleurs $I$ la matrice identité d'ordre 3.

1. Calculer $M^2$ et $M^3$, puis vérifier que $M^3 - 4M^2 - 4M + 16I = 0$.
2. Déduire de la relation précédente que la matrice $M$ est inversible, et donner son inverse.
3. Résoudre l'équation $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$.
4. En factorisant la relation obtenue à la question 1, prouver alors que la matrice $M - 2I$ n'est pas inversible.
5. Montrer que la matrice $P$ est inversible, et calculer son inverse $P^{-1}$.
6. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale, que l'on notera désormais $D$.
7. Prouver que, $\forall n \geq 1$, $M^n = PD^nP^{-1}$, et en déduire l'expression de la matrice $M^n$.

### Deuxième partie : un problème de probabilités.

Un préparationnaire interrompt chaque soir ses révisions de mathématiques pour dîner, et dispose pour cela de trois options : se faire des pâtes, aller prendre un hamburger au fast-food en bas de chez lui, ou réchauffer au micro-ondes un plat préparé. On observe pendant un certain temps les dîners du préparationnaire, et on constate les phénomènes suivants :

- au jour numéroté 0 où l'on débute l'observation, le préparationnaire a mangé un hamburger.
- s'il mange des pâtes au jour $n$, le préparationnaire mangera à nouveau des pâtes le lendemain avec probabilité $\frac{1}{2}$, descendra manger un hamburger sinon (mais ne mangera jamais de plat préparé).
- s'il mange un hamburger au jour $n$, il aura 3 chances sur 4 de manger des pâtes le lendemain, et une chance sur 4 de se faire un plat préparé.
- s'il mange un plat préparé au jour $n$, il mangera un hamburger ou à nouveau un plat préparé le lendemain, avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque.

On note dans tout le problème et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ les évènements suivants :

- $A_n$ : « Le préparationnaire mange des pâtes au jour $n$ ».
- $B_n$ : « Le préparationnaire mange un hamburger au jour $n$ ».
- $C_n$ : « Le préparationnaire mange un plat préparé au jour $n$ ».

On note par ailleurs $a_n = P(A_n)$ ; $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$, et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les probabilités $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$ et $c_2$.
2. Quelle relation aura-t-on en général entre $a_n$, $b_n$ et $c_n$ ?
3. On suppose, pour cette question uniquement, que notre préparationnaire mange à nouveau un hamburger au jour numéro 2. Quelle est alors la probabilité qu'il ait mangé un plat de pâtes au jour 1 ?
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver les relations suivantes :
   $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}b_n \qquad b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \qquad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$.
5. En déduire une matrice $A$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
6. Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
7. Exprimer $A$ en fonction de la matrice $M$ étudiée dans la première partie du problème, et en déduire les valeurs des probabilités $a_n$, $b_n$ et $c_n$.
8. Déterminer les limites de ces probabilités quand $n$ tend vers $+\infty$.
9. Un plat de pâtes contient environ $1,5$ kilocalories, le hamburger 3 kilocalories, et le plat préparé 2 kilocalories (valeurs hautement fantaisistes). Estimer la limite de la quantité moyenne de kilocalories ingérée lors du repas numéro $n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. En considérant qu'un repas équilibré ne doit pas dépasser les 2 kilocalories, que peut-on en conclure pour notre taupin ?

## Exercice

Un élève de prépa ayant décidé de vraiment s'aérer l'esprit pendant les vacances s'est programmé une semaine de farniente aux îles Berthe, au coeur de l'océan des Mathématiques. Cette destination peu prisée des touristes n'est desservie que par une unique compagnie aérienne, dont la fiabilité laisse malheureusement quelque peu à désirer. Sur les avions de cette compagnie, chaque moteur a une probabilité $p$ (inconnue) de tomber en panne pendant le vol (les différents moteurs ont un comportement indépendant les uns des autres). Tout avion est amené à s'écraser si (au moins) la moitié de ses moteurs tombe en panne pendant le vol.

1. On s'intéresse pour l'instant au cas d'un avion à deux moteurs. Montrer que la probabilité qu'au moins l'un de ses deux moteurs tombe en panne vaut $p(2-p)$.
2. En déduire la probabilité que l'avion à deux moteurs arrive à bon port (on notera $A$ cet événement).
3. On considère désormais un avion à quatre moteurs. En notant $M_1$ l'événement « Le moteur n°1 tombe en panne » et similairement pour les trois autres moteurs, décrire l'événement $B$ : « L'avion va s'écraser durant le vol » à l'aide des événements $M_i$.
4. En déduire $P(B)$ (attention à ne pas compter plusieurs fois certains cas).
5. Factoriser $P(A) - P(\overline{B})$, et déterminer son signe en fonction de $p$.
6. Qu'obtient-t-on lorsque $p = 0$ ou $p = 1$ ? Expliquer ce résultat d'un point de vue probabiliste.
7. Si notre préparationnaire a le choix entre un avion à deux moteurs et un avion à quatre moteurs, lequel lui conseillez-vous (on pourra distinguer des cas selon la valeur de $p$) ?
8. Notre préparationnaire ayant finalement renoncé à risquer sa vie pour partir à la plage, il se demande ce que donnerait la comparaison de l'avion à quatre moteurs avec un troisième avion à six moteurs. Pouvez-vous l'aider (il faut vraiment que vous ayez vous-même du temps à perdre) ?