Devoir Maison n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

27 mars 2014

Exercice 1

1. Supposons comme d'habitude qu'une combinaison linéaire des quatre fonctions s'annule : $a\cos(x)+bx\cos(x)+c\sin(x)+dx\sin(x)=0$. En évaluant cette égalité pour $x=0$, on obtient directement $a=0$. En évaluant maintenant pour $x=\pi$, on trouve $-\pi b=0$ (le terme $a\cos(x)$ ayant déjà disparu) donc $b=0$. Continuons avec $x=\dfrac{\pi}{2}$ pour obtenir $c+\dfrac{\pi}{2}d=0$, et $x=1$ (pourquoi pas) pour avoir une dernière équation : $(c+d)\sin(1)=0$, donc $c+d=0$ (le sinus de 1 n'est sûrement pas nul). Autrement dit, $d=-c$, ce qui est contradictoire avec l'équation précédente, sauf si $c=d=0$. On a bien prouvé que la famille était libre.
   Une petite remarque pour ceux qui aiment les méthodes plus originales, et qui aiment les développements. La fonction $x\mapsto a\cos(x)+bx\cos(x)+c\sin(x)+dx\sin(x)$ est par hypothèse nulle, et certainement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. elle ademt donc un développement limité à tout ordre, dont tous les coefficients sont nuls (puisqu'il s'agit de la fonction nulle, et qu'un développement limité est unique). Or, on sait très bien le calculer : $a\cos(x)+bx\cos(x)+c\sin(x)+dx\sin(x)=a\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^5)\right)+bx\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)\right)+c\left(x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)\right)$ $+dx\left(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)\right)=a+(b+c)x+\left(-\dfrac{a}{2}+d\right)x^2+\left(-\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{6}\right)x^3+\left(\dfrac{a}{24}-\dfrac{d}{6}\right)x^4+\left(\dfrac{b}{24}+\dfrac{c}{120}\right)x^5+o(x^5)$. On est déjà allés largement assez loin, l'annulation des premiers coefficients donne successivement $a=0$ puis $b+c=0$ donc $c=-b$, $-\dfrac{a}{2}+d=0$, donc $d=0$, et $-\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{6}=0$ donc $c=-3b$ et cela suffit à conclure que $c=b=0$.
2. C'est une conséquence immédiate des propriétés élémentaires de la dérivation : $\varphi(\lambda f+\mu g)=(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'=\lambda\varphi(f)+\mu\varphi(g)$.
3. Encore un calcul très facile si on comprend ce dont il s'agit : $\varphi(f)=f'$, avec $f'(x)=\cos(x)-(3+x)\sin(x)+2\sin(x)+(2x-1)\cos(x)=2x\cos(x)-\sin(x)-x\sin(x)$. On constate directement que $f'=0\times f_1+2\times f_2-f_3-f_4$, donc les coordonnées de $\varphi(f)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(0,2,-1,-1)$.
4. Autrement dit, on pose $f(x)=a\cos(x)+bx\cos(x)+c\sin(x)+dx\sin(x)$, et on cherche à calculer $f'(x)=-a\sin(x)+b\cos(x)-bx\sin(x)+c\cos(x)+d\sin(x)+dx\cos(x)=(b+c)\cos(x)+dx\cos(x)+(d-a)\sin(x)-bx\sin(x)$. Par définition, $\varphi(f)=f'=\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3+\delta f_4$, donc par unicité de l'expression comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base, on obtient les relations $\alpha=b+c$, $\beta=d$, $\gamma=d-a$ et $\delta=-b$. On peut effectivement écrire ces relations sous la forme $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&1\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$.

5. On peut appliquer très simplement le pivot de Gauss, qui ira vite si on effectue les bonnes étapes :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice M est donc inversible, et $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Il suffit en fait de constater que l'application qui, à une fonction fonction f ayant pour coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dans la base $\mathcal{B}$, associe celle ayant pour coordonnées $M^{-1} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$, est réciproque de f. En effet, si on compose les deux, on reviendra sur une fonction ayant pour coordonnées $M \times M^{-1} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$, c'est-à-dire sur la fonction dont on est partis. De même dans l'autre sens. L'application φ est donc bijective, et sa réciproque φ^{-1} associe à la fonction $g : x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta x \cos(x) + \gamma \sin(x) + \delta x \sin(x)$ une image $\varphi^{-1}(g) : x \mapsto (\beta - \gamma) \cos(x) - \delta x \cos(x) + (\alpha + \delta) \sin(x) + \beta x \sin(x)$.
7. Il est en effet inutile de faire le moindre calcul. On sait que l'opération réciproque de φ, qui calcule une dérivée, nous calculera une primitive de la fonction f. Il suffit donc de calculer $\varphi^{-1}(f)$ pour obtenir $F(x) = 2\cos(x) - 2x\cos(x) + 5\sin(x) + x\sin(x)$.

Exercice 2

1. Supposons donc que le triangle ABC est équilatéral direct (s'il est indirect, la formule finale étant de toute façon symétrique, ça ne change rien, il suffira d'échanger les rôles de B et C), et notons $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$. Profitons-en pour rappeler que ce nombre est une racine cubique de l'unité, et qu'on a donc $j^3 = 1$, ainsi que $1 + j + j^2 = 0$. Le triangle est donc équilatéral direct si et seulement si $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$, ou encore $c - e^{i\frac{\pi}{3}}b + a(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1) = 0$. Or, $e^{i\frac{\pi}{3}} = -e^{-2i\frac{\pi}{3}} = -j^2$, et $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$. On trouve donc la première condition équivalente $c + j^2b + aj = 0$. Bien entendu, en multipliant par j ou j^2, on trouve les conditions symétriques $jc + b + j^2a = 0$ et $j^2c + jb + a = 0$ (en utilisant que $j^3 = 1$). Si le triangle est équilatéral indirect, on aurait de même les conditions $a + jc + j^2b = ja + j^2c + b = j^2a + c + jb = 0$. Le triangle ABC est donc équilatéral si et seulement si l'une des deux conditions $a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$ est vérifiée, ou si on préfère si le produit des deux nombres est nul, ce qui revient à dire que $0 = (a + jb + j^2c)(a + jc + j^2b) = a^2 + jac + j^2ab + jab + j^2bc + b^2 + j^2ac + c^2 + jbc = a^2 + b^2 + c^2 + (j + j^2)(ab + ac + bc)$. En se rappelant que $j + j^2 = -1$, on trouve exactement $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0$, ce qui est la caractérisation demandée.

2. (a) On calcule simplement $P(0) = \frac{1}{r} > 0$ puisque $r > 0$ par hypothèse, et $P(r) = r^3 - 3r^3 - \frac{3}{r} + \frac{1}{r} = -2r^3 - \frac{2}{r} < 0$.

   (b) On peut pourquoi pas écrire que $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^3$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$.

   (c) En appliquant trois fois le théorème des valeurs intermédiaires, on prouve l'existence de (au moins) trois racines dans les intervalles respectifs $]-\infty, 0[$, $]0, r[$ et $]r, +\infty[$. Le polynôme étant de degré 3, il ne peut pas avoir plus de trois racines réelles (ou plus de trois racines tout court d'ailleurs), ce sont donc les seules, et elles sont évidemment distinctes puisqu'elles appartiennent à des intervalles disjoints. Pour ceux qui n'apprécient pas d'appliquer les valeurs intermédiaires à un intervalle non borné, prenez une valeur de $x < 0$ telle que $P(x) < 0$ (ça existe nécessairement sinon $P(x)$ va avoir du mal à tendre vers $-\infty$ et $-\infty$) et appliquez-le sur $]x, 0[$ (de même de l'autre côté, bien sûr).

3. Calculons toujours $P(0) = \frac{1}{r} < 0$, et $P(r) = -2r^3 - \frac{2}{r} > 0$. Les limites aux infinis n'ont pas changé, et comme r est situé avant 0, on a toujours trois racines distinctes, cette fois-ci dans les intervalles $]-\infty, r[$, $]r, 0[$ et $]0, +\infty[$.

4. (a) C'est une simple application des relations entre coefficients et racines d'un polynôme : $x_1 + x_2 + x_3 = 3r$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{3}{r^2}$, et $x_1x_2x_3 = -\frac{1}{r}$.

   (b) Il faut réussir à bidouiller dans chaque calcul pour faire apparaitre des choses dont on connait la valeur :

      i. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{-\frac{3}{r^2}}{-\frac{1}{r}} = \frac{3}{r}$.

      ii. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 9r^2 + \frac{6}{r^2}$.

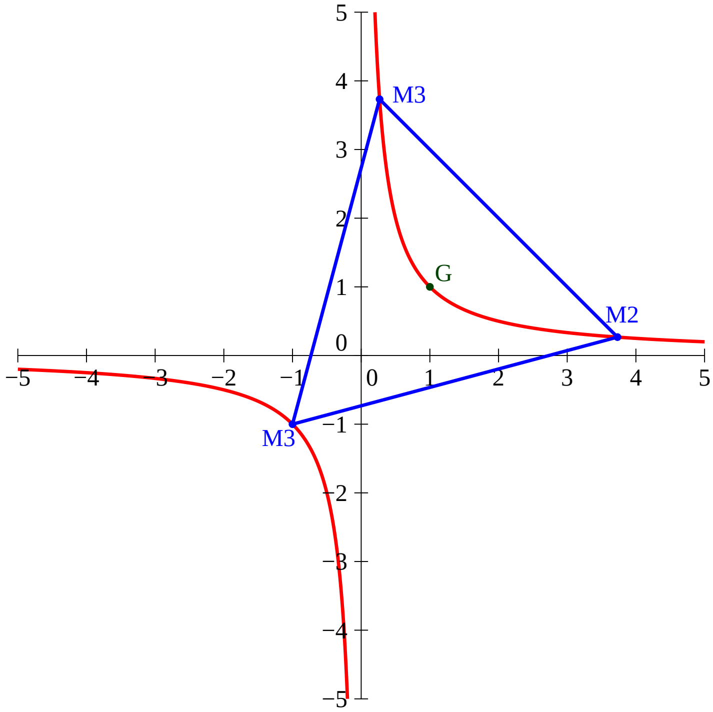
      iii. $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{3r}{-\frac{1}{r}} = -3r^2$.

      iv. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^2 - \frac{2}{x_1x_2} - \frac{2}{x_1x_3} - \frac{2}{x_2x_3} = \frac{9}{r^2} + 6r^2$.

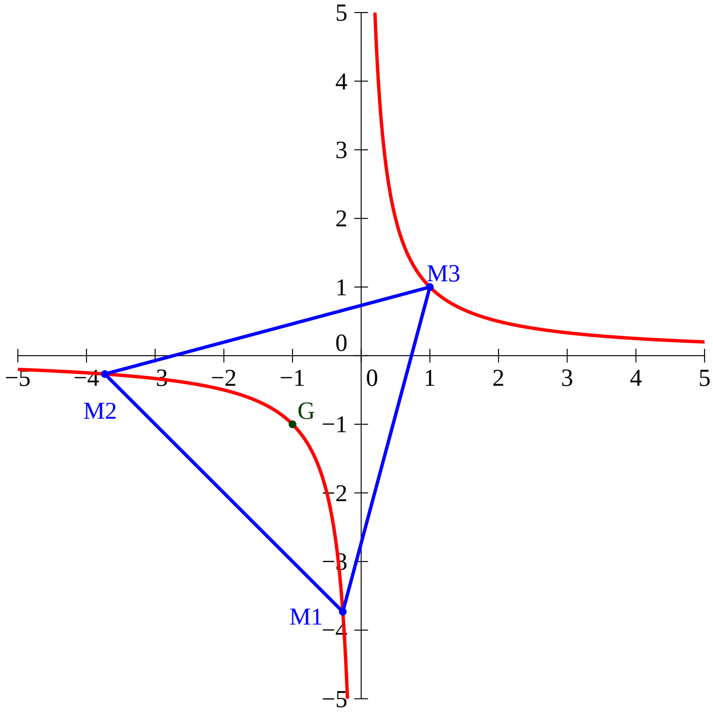
v. $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_1}+\dfrac{x_2}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_2}=(x_1+x_2+x_3)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}\right)-3=3r\times\dfrac{3}{r}-3=6.$

5. La courbe est une hyperbole bien connue. Notons $a=x_1+\dfrac{i}{x_1}$, $b=x_2+\dfrac{i}{x_2}$ et $c=x_3+\dfrac{i}{x_3}$ les affixes respectives des points M_1, M_2 et M_3. Calculons donc $a^2=x_1^2-\dfrac{1}{x_1^2}+2i$. De même pour b^2 et c^2, et on en déduit que $a^2+b^2+c^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2-\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_2^2}-\dfrac{1}{x_3^2}+6i=9r^2+\dfrac{6}{r^2}-\dfrac{9}{r^2}-6r^2+6i=3r^2-\dfrac{3}{r^2}+6i$. Calculons désormais $ab=x_1x_2-\dfrac{1}{x_1x_2}+i\left(\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}\right)$. Les formules pour ac et bc sont obtenues par permutation circulaire des x_i, et on en déduit que $ab+bc+ac=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3-\dfrac{1}{x_1x_2}-\dfrac{1}{x_1x_3}-\dfrac{1}{x_2x_3}+i\left(\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_1}+\dfrac{x_2}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_2}\right)=-\dfrac{3}{r^2}+3r^2+6i$ (en exploitant toujours les résultats de la question précédente). Miracle, les deux quantités sont égales, et le préliminaire nous permet de conclure que le triangle est effectivement équilatéral. Reste à voir ce qu'on peut dire du centre de gravité G, dont l'affixe est $z_G=\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}+\dfrac{i}{3}\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}\right)=r+\dfrac{i}{r}$. Ce point est bel et bien situé sur l'hyperbole, plus précisément à l'abscisse r.

6. Si $r=1$, l'équation à résoudre est $X^3-3X^2-3X+1=0$. On remarque que -1 est racine évidente du polynôme qu'on peut donc factoriser sous la forme $P=(X+1)(aX^2+bX+c)=aX^3+(a+b)X^2+(b+c)X+c$. Par identification, $a=1$, $b=-4$ et $c=1$, donc $P=(X+1)(X^2-4X+1)$. Ce deuxième facteur a pour discriminant $\Delta=16-4=12$, et admet pour racines $x_1=\dfrac{4+\sqrt{12}}{2}=2+\sqrt{3}$, et $x_2=2-\sqrt{3}$. Le centre de gravité des trois points aura pour coordonnées $(1,1)$, ce qui donne la figure suivante :



7. Si $r=-1$, $P=X^3+3X^2-3X-1$. Comme la vie est bien faite, 1 est cette fois-ci racine du polynôme, donc $P=(X-1)(aX^2+bX+c)$. On trouve comme précédemment $a=1$, $b=4$ et $c=1$, donc $P(X-1)(X^2+4X+1)$. Le trinôme a pour racines $x_1=-2+\sqrt{3}$ et $x_2=-2-\sqrt{3}$ et le centre de gravité du triangle aura pour coordonnées $(-1,-1)$. La figure est exactement symétrique de la précédente :



8. (a) En reprenant les notations de la question 5, $R^2=|z_G-a|^2=|z_G-b|^2=|z_G-c|^2$. En additionnant, $3R^2=|z_G-a|^2+|z_G-b|^2+|z_G-c|^2=\left|r-x_1+\frac{i}{r}-\frac{i}{x_1}\right|^2+\left|r-x_2+\frac{i}{r}-\frac{i}{x_2}\right|^2+\left|r-x_3+\frac{i}{r}-\frac{i}{x_3}\right|^2=(r-x_1)^2+(r-x_2)^2+(r-x_3)^2+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x_3}\right)^2=3r^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2-2r(x_1+x_2+x_3)+\frac{3}{r^2}+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}-\frac{2}{r}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=3r^2+9r^2+\frac{6}{r^2}-6r^2+\frac{3}{r^2}+\frac{9}{r^2}+6r^2-\frac{6}{r^2}=12r^2+\frac{12}{r^2}$. On trouve bien $R^2=4r^2+\frac{4}{r^2}$. Le centre du cercle circonscrit dans un triangle équilatéral étant confondu avec le centre de gravité, ce dernier a pour coordonnées $\left(r,\frac{1}{r}\right)$. Une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est donc $(x-r)^2+\left(y-\frac{1}{r}\right)^2=R^2$, soit $x^2+y^2-2rx-\frac{2y}{r}=3r^2+\frac{3}{r^2}$.

   (b) On constate que $Q(-r)=r^4+2r^4-3r^4-3+2+1=0$, donc $-r$ est racine du polynôme Q. On peut alors écrire $Q=(X+r)(aX^3+bX^2+cX+d)=aX^4+(ar+b)X^3+(br+c)X^2+(cr+d)X+dr$. Par identification, on trouve $a=1$, puis $ar+b=-2r$, donc $b=-3r$; $br+c=-3r^2-\frac{3}{r^2}$, donc $c=-\frac{3}{r^2}$; et enfin $cr+d=-\frac{2}{r}$, donc $d=\frac{1}{r}$ (ce qui est cohérent avec la dernière condition). Extraordinaire surprise, on reconnait le polynôme P, et on a donc $Q=(X+r)P$. Les quatre racines du polynôme Q sont donc $-r$, x_1, x_2

et x_3.

(c) Un point appartient à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{H}$ s'il vérifie l'équation de $\mathcal{C}$ et en même temps $y = \dfrac{1}{x}$. Intégrons cette donnée dans l'équation du cercle : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2rx - \dfrac{2}{rx} = 3r^2 + \dfrac{3}{r^2}$. En multipliant tout par x^2 et en passant tout à gauche, on trouve la condition $x^4 - 2rx^3 - 3\left(r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right)x^2 - \dfrac{2}{r}x + 1 = 0$. Incroyable, il s'agit là exactement de l'équation $Q(x) = 0$! L'hyperbole coupe donc le cercle en quatre points : les points d'abscisses x_1, x_2 et x_3 ; et le point de coordonnées $\left(-r, -\dfrac{1}{r}\right)$ (puisque $-r$ est la quatrième racine du polynôme Q), qui n'est autre que le symétrique du point G par rapport à l'origine du repère (ses coordonnées sont opposées de celles de G). Il n'y aurait pas grand intérêt à tracer le cercle dans les deux cas particuliers étudiés plus haut, puisqu'alors le point Ω est confondu avec le point M_3. On peut en fait constater que le cercle et l'hyperbole sont alors tangents en ce point (au sens où ils y ont une tangente commune).