Devoir Maison n°8

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 27 mars 2014

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et on considère les quatre fonctions $f_1 : x \mapsto \cos(x)$, $f_2 : x \mapsto x\cos(x)$, $f_3 : x \mapsto \sin(x)$ et $f_4 : x \mapsto x\sin(x)$. On note $\mathcal{B}$ la famille (f_1, f_2, f_3, f_4), et $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre (tous les moyens sont bons), et en déduire qu'elle constitue une base de F.
2. On note désormais φ l'application définie sur F par $\varphi(f) = f'$. Montrer que φ est à valeurs dans F, et qu'il s'agit d'une application linéaire : $\forall (g, h) \in F^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$ (non, ce n'est vraiment pas difficile !).
3. En posant $f(x) = (3 + x)\cos(x) + (2x - 1)\sin(x)$, calculer $\varphi(f)$ et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.
4. Soit $f \in F$, notons (a, b, c, d) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ les coordonnées de $\varphi(f)$ dans cette même base. Exprimer α, β, γ et δ en fonction de a, b, c, et d. En déduire l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.
5. Déterminer si la matrice M est inversible et, si oui, calculer son inverse.
6. En utilisant les résultats des deux questions précédentes (interdit de faire autrement), déterminer si l'application φ est injective, surjective, bijective, de F vers F. Le cas échéant, déterminer son application réciproque φ^{-1}.
7. Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto (3 + x)\cos(x) + (2x - 1)\sin(x)$ (je ne veux pas voir un seul symbole d'intégrale sur votre copie).

Exercice 2

Soit r un réel non nul, on considère le polynôme $P = X^3 - 3rX^2 - \dfrac{3}{r^2}X + \dfrac{1}{r}$.

1. Question préliminaire : soient trois points A, B et C d'affixes complexes respectives a, b et c dans le plan. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ (si vous n'y arrivez pas, vous êtes priés de continuer quand même !).
2. On suppose ici que $r > 0$.
   (a) Donner le signe de $P(0)$ et de $P(r)$.
   (b) Calculer les limites de P en $\pm\infty$.

(c) Montrer que P admet trois racines réelles distinctes et non nulles.

3. On suppose maintenant que $r < 0$. Montrer de même que P admet trois racines réelles distinctes non nulles.
4. Dans le cas général, on note x_1, x_2 et x_3 les trois racines de P.
   (a) Donner les valeurs de $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2x_3$ et $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
   (b) En déduire les valeurs des nombres suivants :
      i. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$
      ii. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
      iii. $\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_1x_3} + \dfrac{1}{x_2x_3}$
      iv. $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_3^2}$
      v. $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_1} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_2}$
5. On considère dans le plan la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ (à quoi ressemble-t-elle ?), et on note M_1, M_2 et M_3 les trois points de $\mathcal{H}$ d'abscisses respectives x_1, x_2 et x_3. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral (on pourra utiliser la question préliminaire), et que son centre de gravité appartient aussi à $\mathcal{H}$.
6. Calculer les racines x_1, x_2 et x_3 dans le cas où $r = 1$. Tracer sur une même figure la courbe $\mathcal{H}$, le triangle $M_1M_2M_3$ et le centre de gravité G.
7. Même question avec $r = -1$.
8. Pour ceux qui aiment la géométrie, on note désormais $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$ (dans le cas général).
   (a) Vérifier que le rayon R de $\mathcal{C}$ est solution de l'équation $R^2 = 4r^2 + \dfrac{4}{r^2}$. En déduire une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.
   (b) On définit $Q = X^4 - 2rX^3 - 3\left(r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right)X^2 - \dfrac{2}{r}X + 1$. Déterminer les racines du polynôme Q (il en existe une plus ou moins évidente).
   (c) Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ passe par un point Ω de $\mathcal{H}$ distinct de M_1, M_2 et M_3. Quelle relation géométrique a-t-on entre les points G et Ω ?