Devoir Maison n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

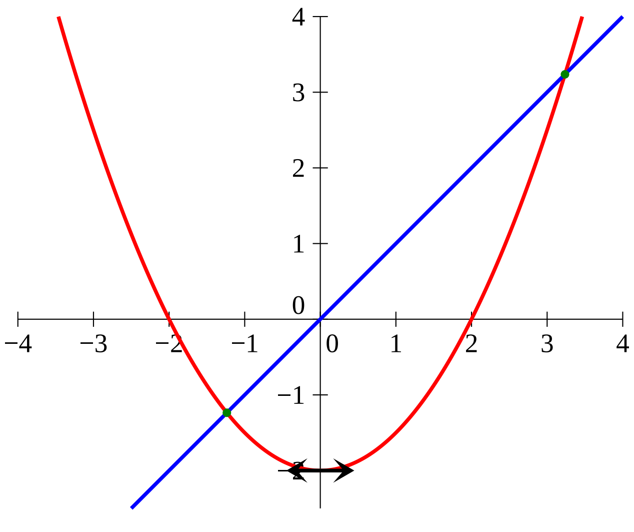
9 mars 2014

Exercice

Commençons par effectuer les calculs normaux dans ce genre de situation, à savoir l'étude de la fonction f et du signe de $f(x) - x$. Ah oui, il faudrait peut-être commencer par poser $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4)$. Il s'agit d'une fonction du second degré qui est paire, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, admettant pour minimum $f(0) = -2$. Elle s'annule lorsque $x = \pm 2$. Calculons ensuite $f(x) - x = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$, cette expression a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ et admet pour racines $x_1 = 1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{5}$. Notons que $-2 \leq x_1 \leq 0$, et $2 \leq x_2$. On peut également signaler tout de suite que $f'(x_2) = x_2 > 2$, et $f'(x_1) = 2x_1 < -1$, il ne faut donc pas s'attendre à avoir beaucoup de valeurs de u_0 pour lesquels la suite converge, les deux points fixes étant répulsifs. On peut en tout cas dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	x_1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	x_2	$\nearrow$	$+\infty$

Encore mieux, on peut bien sûr faire un joli dessin :



Le problème ici est qu'on ne dispose pas de tant d'intervalles sympathiques que ça. Notons tout de même la présence des trois intervalles stables suivants : $[x_2, +\infty[$; $[-2, 0]$ et $[-2, x_2]$ qui contient le précédent. Tentons de séparer des cas selon l'intervalle d'appartenance de u_0 :

- **Cas très spécial n°1 :** avant de parler d'intervalles, signalons tout de même les deux cas très particuliers suivants. Si $u_0 = x_1$ ou $u_0 = x_2$, la suite sera constante et donc convergente (c'est toujours le cas pour une suite récurrente quand on part d'un point fixe).
- **Cas n°2 :** $u_0 \in]x_2, +\infty[$. L'intervalle étant stable, on démontre aisément par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > x_2$. C'est en effet vrai pour u_0 par hypothèse, et si on le suppose pour u_n, alors $u_{n+1} = f(u_n) > x_2$. De plus, comme $f(x) - x$ sur cet intervalle, la suite (u_n) sera croissante (on aura en effet toujours $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Si elle était majorée, elle convergerait donc vers un réel strictement supérieur à x_2 (puisque supérieur à u_0), ce qui n'est pas possible car il n'y a pas de point fixe supérieur à x_2. Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- **Cas n°3 :** $u_0 \in]x_1, 0[$. Cet intervalle n'est pas stable par f, mais on sait que $]-2, 0[$ l'est. Plus précisément, $f(]-2, x_1[) =]x_1, 0[$ et $f(]x_1, 0[) =]-2, x_1[$. On peut donc prouver aisément par récurrence que tous les termes d'indice pair de la suite appartiendront à $]x_1, 0[$, et ceux d'indice impair à $]-2, x_1[$. Un petit dessin des premiers termes de la suite laisse supposer que les termes pairs se rapprochent de 0 et les impairs de -2, nous allons le prouver rigoureusement. Soit $g = f \circ f$ la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{2}(f(x)^2 - 4) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)^2 - 2 = \frac{1}{8}x^4 - x^2$. Les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites récurrentes associées à la fonction g, avec $u_0 \in]x_1, 0[$ et $u_1 \in]-2, x_1[$. Cherchons les points fixes de g et le signe de $g(x) - x$. Ce n'est en fait pas bien difficile, on sait que $f(f(x_1)) = x_1$, et de même pour x_2, donc ces deux réels sont des points fixes de g. En fait, on en connait deux autres : $g(0) = f(f(0)) = f(-2) = 0$, et $g(-2) = f(0) = -2$. L'équation $g(x) = x$ étant de degré 4, elle ne peut admettre plus de quatre racines, et g admet donc quatre points fixes : -2, x_1, 0 et x_2. Un petit tableau de signe permet de plus de prouver que $g(x) - x \geq 0$ sur $]-\infty, -2[$, sur $]x_1, 0[$ et sur $]x_2, +\infty[$, et $g(x) - x \leq 0$ sur $]-2, x_1[$ et sur $]0, x_2[$. Enfin, $g'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x = \frac{1}{2}x(x^2 - 4)$, donc g est croissante sur $[-2, 0]$. Ceci suffit à prouver que les intervalles $]-2, x_1[$ et $]x_1, 0[$ sont stables par g, puis par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in]x_1, 0[$ et $u_{2n+1} \in]-2, x_1[$. Comme $g(x) - x \geq 0$ sur $]x_1, 0[$, la sous-suite (u_{2n}) est donc croissante et majorée, elle converge, et ce ne peut être que vers un point fixe de g, donc 0. De même, (u_{2n+1}) est décroissante minorée, et converge vers -2. La suite (u_n) n'est bien sûr pas convergente.
- **Cas très particulier n°4 :** $u_0 = 0$ et $u_0 = -2$. Ces deux valeurs donnent un cas intéressant puisque la suite est alors périodique de période 2, alternant entre les valeurs -2 et 0 (cela découle des calculs effectués dans le cas précédent). Bien sûr, la suite ne converge pas dans ce cas.
- **Cas n°5 :** $u_0 \in]0, 2]$. La fonction f étant paire, $u_1 = f(u_0) = f(-u_0)$, donc la suite aura exactement le même comportement que si on avait pris une valeur opposée pour u_0. Autrement dit, la suite sera périodique de période 2 à partir du rang 1 si $u_0 = 2$, elle sera stationnaire (à partir du rang 1 aussi) égale à x_1 si $u_0 = -x_1$, et admettra deux sous-suites cinvergeant respectivement vers -2 et 0 dans tous les autres cas.
- **Cas n°6 :** $u_0 \in]2, x_2[$. On a déjà signalé précédemment que $[-2, x_2[$ était stable, tous les termes de la suite seront donc dans cet intervalle. Peut-on avoir toujours $u_n \in]2, x_2]$? Si c'était le cas, la suite serait minorée, mais aussi décroissante puisque $f(x) - x \leq 0$ sur cet intervalle. elle convergerait alors nécessairement, mais vers quoi ? Il n'y a pas de point fixe dans cet intervalle (on ne peut pas tendre vers x_2 en décroissant si on part d'une valeur strictement inférieure à x_2), ce n'est pas possible. Conclusion : il existe un entier n pour lequel $u_n \in [-2, 2]$. Bon,

mais alors on sait ce qui se passe ensuite, on l'a étudié juste avant ! Oui certes, mais il y avait quand même quelques cas particuliers. Si le premier terme de la suite inférieur ou égal à 2 est égal à -2, 0 ou 2, la suite sera périodique à partir d'un certain rang. Comme -2 a pour unique antécédent 0, ce cas ne peut pas se produire (ce ne serait pas le premier terme plus petit que 2), de même pour 0 qui a pour antécédents -2 et 0. Par contre, $f(x) = 2$, soit $\frac{1}{2}x^2 - 4 = 0$ a pour solutions $x = \pm 2\sqrt{2}$, et $u_0 = 2\sqrt{2}$ par exemple donnera donc $u_1 = 2$, puis une suite périodique. Mais de même, $2\sqrt{2}$ a un antécédent par f situé dans notre intervalle, qui a bien sûr lui-même un antécédant, etc. Il y aura donc une infinité de valeurs donannt une suite périodique, qu'on peut décrire à l'aide de la réciproque de $f_{|\mathbb{R}^+}$: $f(x) = y$ donne $\frac{1}{2}x^2 - 2 = y$, soit $x = \sqrt{2y+4}$. En notant $h(x) = \sqrt{2x+4}$, tous les réels pouvant s'écrire sous la forme $h^n(2)$ pour un certain entier n (il s'agit bien de la composée de h par elle-même n fois) seront dans ce cas (on peut aussi les décrire comme tous les termes de la suite récurrente définie par $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = h(v_n)$. On aura exactement le même genre de problèmes pour les suites pour lesquelles le premier termes inférieur à 2 est égal à $-x_1$, qui vont devenir ensuite stationnaires. Là encore, on peut caractériser facilement les valeurs de u_0 donnant ce cas comme tous les réels de la forme $h^n(-x_1)$, pour un certain entier n. Le reste du temps, la suite finira par donner deux sous-suites convergeant vers -2 et 0 « comme d'habitude ».

- **Cas n°7 :** $u_0 < -2$. Par parité de la fonction, on se retrouve avec exactement la même chose que si $u_0 > 2$. Si $u_0 < -x_2$, le suite sera donc croissante et divergera vers $+\infty$; si $u_0 = -x_2$, la suite va très vite stationner vers x_2 ; et si $-x_2 < u_0 < 2$, on aura en général des sous-suites convergeant vers -2 et 0, sauf si u_0 est l'opposé de l'un des multiples réels posant problème, dont on a fait la liste dans le cas précédent.
- **Conclusion :** C'est une sacrée pagaille !

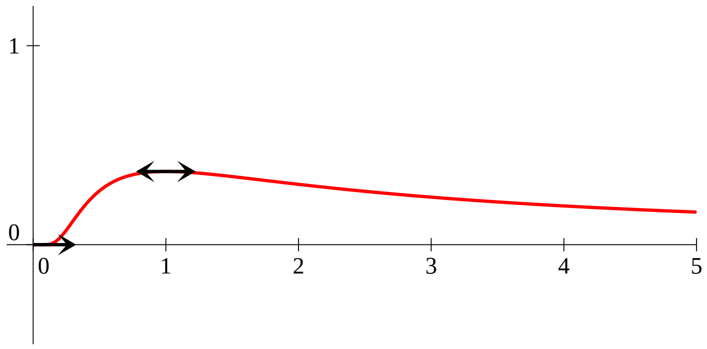
Problème (d'après sujet de concours)

A. Généralités

1. Les fonctions f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux, de plus $f'(t) = \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}} = \frac{g(t)}{t}$, donc $tf'(t) = g(t)$.
2. En posant $T = \frac{1}{t}$, on peut écrire $g(t) = Te^{-T}$, avec $\lim\limits_{t \to 0^+} T = +\infty$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{T \to +\infty} Te^{-T} = 0$, donc g est prolongeable par continuité en posant $g(0) = 0$. De même, le taux d'accroissement de la fonction g en 0 peut s'écrire T^2e^{-T}, qui a également une limite nulle. La fonction prolongée est donc dérivable, et $g'(0) = 0$.
3. Calculons donc $g'(t) = \dfrac{\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}} - e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} = \dfrac{e^{-\frac{1}{t}}(1-t)}{t^3}$. La fonction g est donc croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$, avec pour maximum $g(1) = e^{-1}$, et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$ (pas de forme indéterminée ici, le numérateur tend vers 1). Autrement dit, on peut dresser le tableau de variations suivant :

t	0		1		$+\infty$
f			e^{-1}		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

La courbe ressemble à ceci :



4. On cherche donc à calculer $H(x) = \int_1^x g\left(\frac{1}{t}\right)\,dt = \int_1^x te^{-t}\,dt$. On effectue une IPP en posant $u(t) = t$, donc $u'(t) = 1$, et $v'(t) = e^{-t}$, soit $v(t) = -e^{-t}$. On trouve donc $H(x) = [-te^{-t}]_1^x + \int_1^x e^{-t}\,dt = -xe^{-x} + \frac{1}{e} - e^{-x} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} - (1+x)e^{-x}$.
5. (a) L'équation (E_n) est équivalent à l'équation plus simple $g(t) = \frac{1}{n}$. La fonction g étant bijective de $[0,1]$ vers $\left[0, \frac{1}{e}\right]$, et ensuite de $[1, +\infty[$ vers $\left]0, \frac{1}{e}\right]$, l'équation ne peut admettre de solutions que si $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{e}$, soit $n \geq e$, ce qui correspond bien à la condition $n \geq 3$ pour un entier. Dans ce cas, la bijectivité de g assure l'existence d'une solution unique dans l'intervalle $[0,1]$ et d'une autre dans l'intervalle $[1, +\infty[$.
   (b) On sait que $g(\alpha_n) = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = g(\alpha_{n+1})$. La fonction g étant strictement croissante sur $[0,1]$ (intervalle auquel appartiennent tous les termes de la suite (α_n)), on en déduit que $\alpha_n > \alpha_{n+1}$, ce qui prouve la décroissance de la suite (α_n). On prouve de même que (β_n) est croissante en utilisant la décroissance de g sur $[1, +\infty[$.
   (c) Supposons donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = l \neq 0$. Puisque $g(\alpha_n) = \frac{1}{n}$, on aura certainement $\lim\limits_{n\to+\infty} g(\alpha_n) = 0$, mais on devrait aussi avoir, par continuité de la fonction g, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(\alpha_n) = g(l)$. On en déduit que $g(l) = 0$, ce qui prouve que $l = 0$. La seule limite possible pour nos suites est donc 0. La suite (α_n), qui est décroissante et minorée (par 0), converge certainement, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. Par contre, (β_n) ne peut sûrement pas converger vers 0 puisque $\beta_n \geq 1$, donc la suite diverge. Comme elle est croissante, la seule possiblité est que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

B. Fonctions définies par des intégrales.

1. On a déjà expliqué plus haut que $\lim\limits_{t\to 0^+} e^{-\frac{1}{t}} = 0$. Le prolongement est donc continue, et $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = 0$ (encore du déjà vu), le théorème de prolongement de la dérivée permet de conclure que f est dérivable en 0, et que $f'(0) = 0$. L'égalité de la question $A.1$ devient donc $0 \times 0 = 0$, ce qui est en effet vrai.
2. (a) Les deux fonctions f et g (une fois prolongées) étant continues sur $[0, x]$ quel que soit le réel strictement positif x, les intégrales sont en effet bien définies. On peut effectuer une

IPP dans l'intégrale définissant F, en posant $u(t) = f(t)$, et $v'(t) = 1$ (donc $v(t) = t$) pour obtenir $F(x) = [tf(t)]_0^x - \int_0^x tf'(t)\, dt = xe^{-\frac{1}{x}} - \int_0^x g(t)\, dt = xe^{-\frac{1}{x}} - G(x)$.

(b) L'inégalité $G(x) \geq 0$ est évidente puisque la fonction g est positive sur $\mathbb{R}^+$. Pour l'autre côté, on écrit $G(x) = \int_0^1 g(t)\, dt + \int_1^x g(t)\, dt$, en remarquant que $g(t) \leq \frac{1}{t}$ si $t \geq 1$. En posant $C = \int_0^1 g(t)\, dt$, on obtient donc $G(x) \leq C + \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = C + \ln(x)$.

(c) D'après la question précédente, $0 \leq \frac{G(x)}{x} \leq \frac{\ln(x)}{x}$. Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{G(x)}{x} = 0$. Or, en reprenant le résultat de la question a, $\frac{F(x)}{x} = e^{-\frac{1}{x}} - \frac{G(x)}{x}$. On peut donc conclure aisément que $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = 1$.

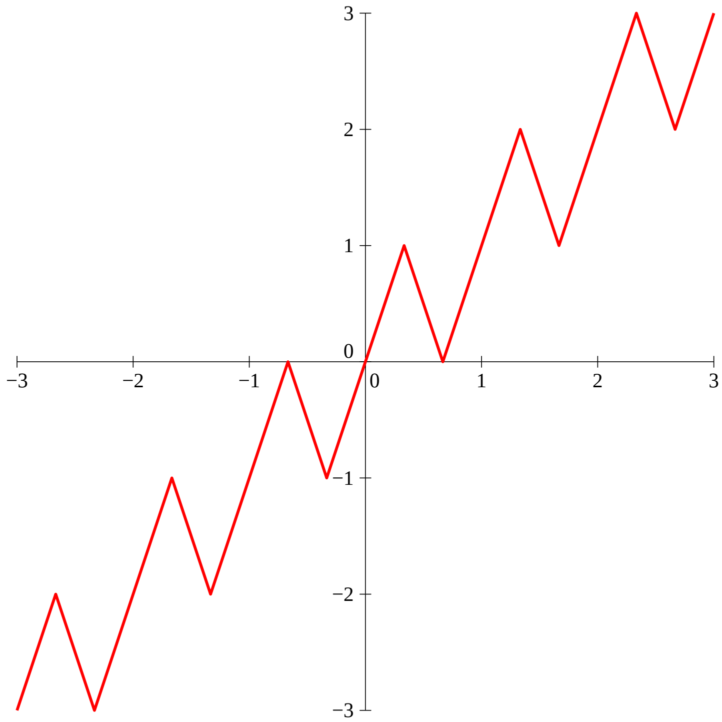
3. Puisqu'on est sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut normaliser sans problème : $y' + \frac{1}{x^2} y = 1$. Les solutions de l'équation homodène associée sont les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{\frac{1}{x}}$. Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante, donc sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{\frac{1}{x}}$. On a alors $y_p'(x) = K'(x)e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} K(x)e^{\frac{1}{x}}$, et $y_p'(x) + \frac{1}{x^2} y_p(x) = 1 \Leftrightarrow K'(x)e^{\frac{1}{x}} = 1$, soit $K'(x) = f(x)$. On peut donc choisir $K(x) = F(x)$, et $y_p(x) = F(x)e^{\frac{1}{x}}$. Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions $y : x \mapsto (F(x) + K)e^{\frac{1}{x}}$.

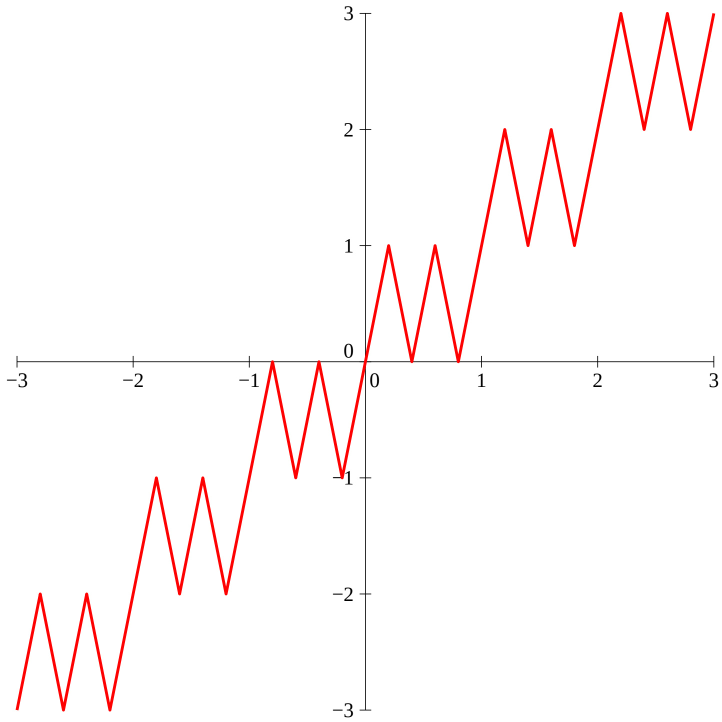
C. Étude qualitative d'une équation différentielle.

1. Il suffit de poser $x = 0$ dans l'équation (E) pour obtenir $y(0) = 0$, soit $u_0 = 0$.
2. Dérivons donc : $2xy'(x) + x^2y''(x) + y'(x) = 2x$, donc, en choisissant à nouveau $x = 0$, $u_1 = y'(0) = 0$. on dérive une nouvelle fois (on peut toujours, la fonction est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour être solution de (E)) : $2y'(x) + 2xy''(x) + 2xy''(x) + x^2y'''(x) + y''(x) = 2$. En posant une dernière fois $x = 0$, on trouve alors $y''(0) = u_2 = 2$.
3. Si c'était le cas, il devrait vérifier $y(0) = y'(0) = 0$ et $y''(0) = 2$, soit $y(x) = x^2$ (le coefficient constant et celui de degré 1 sont nuls à cause des conditions $u_0 = u_1 = 0$). Or, la fonction $x \mapsto x^2$ n'est certainement pas solution de (E) puisqu'elle vérifie $x^2y' + y = 2x^3 + x^2 \neq x^2$.
4. Appliquons donc la formule de Leibniz pour calculer la dérivée n-ème de x^2y' : $(x^2y')^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} y'^{(n-k)}(x) = x^2y^{(n+1)}(x) + n \times 2xy^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2y^{(n-1)}(x) = x^2y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)}$. Or, en dérivant n fois l'équation (E), on doit trouver, pour $n \geq 3$ (pour que le second membre disparaisse), $(x^2y')^{(n)} + y^{(n)} = 0$, ce qui donne bien l'égalité demandée. Si $n < 3$, il y a des petits soucis, alors on va se contenter de ça.
5. La question précédente permet d'obtenir la relation de récurrence (en fixant pour changer $x = 0$) suivante : $u_n + n(n-1)u_{n-1} = 0$, soit $u_n = -n(n-1)u_{n-1}$. On peut en déduire la formule $u_n = (-1)^n n(n-1))!^2$, qu'on va prouver par récurrence pour tout entier $n \geq 2$. Pour $n = 2$, $(-1)^2 \times 2 \times 1!^2 = 2 = u_2$, donc l'initialisation est vérifiée. Supposons la formule vraie pour u_n, alors $u_{n+1} = -(n+1)nu_n = -(n+1)n(-1)^n n(n-1)!^2 = (-1)^{n+1}(n+1)n^2(n-1)!^2 = (-1)^{n+1}(n+1)n!^2$. C'est bon, ça marche !

Divertissement (pour ceux qui ont du temps).

La réponse est fort simple : de telles fonctions existent toujours lorsque n est impair, mais jamais lorsque n est pair. Pour le cas impair, contentons-nous de donner un exemple pour $n = 3$ et pour $n = 5$ (je vous laisse vous convaincre que ça marche bien) :





Plus compliqué, prouver que ça ne marche pas lorsque n est pair. Supposons donc qu'une telle fonction existe pour $n = 2$. Elle s'annule alors exactement deux fois, en x_1 et en $x_2 > x_1$. Sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, la fonction est toujours de même signe, par exemple positif. Étant continue, elle admet sur $[x_1, x_2]$ un maximum M strictement positif (sinon 0 serait atteint nettement plus de deux fois) en un réel $x_3 \in]x_1, x_2[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, le réel $\dfrac{M}{2}$ admet donc un premier antécédent sur $]x_1, x_3[$ et un deuxième sur $]x_3, x_2[$. Il ne peut pas en avoir d'autres, ce qui interdit à la fonction de prendre des valeurs strictement supérieures à $\dfrac{M}{2}$ sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$ et $]x_2, +\infty[$ (sinon, par TVI à nouveau, on trouverait d'autres antécédents). C'est très gênant, car du coup les valeurs strictement supérieures à M ne peuvent être atteintes nulle part, et la fonction n'est même plus surjective ! Les plus courageux adapteront la démonstration au cas $n = 4$ (c'est encore assez élémentaire, sur les trois intervalles séparant les quatre valeurs d'annulation de la fonction, il y en a deux sur lesquels la fonction est de même signe, ce qui impose quatre antécédents pour les valeurs suffisamment proches de 0, et la fonction ne peut plus prendre les valeurs situées au-dessus), mais le cas général est un peu plus pénible à rédiger (et non, ne pensez même pas à faire une récurrence !).