Devoir Maison n°7

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 9 mars 2014

Exercice

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 - 4)$. Déterminer le comportement de la suite (u_n) en fonction de la valeur de u_0 (plus vous arrivez à dire de choses, mieux c'est !).

Problème (d'après sujet de concours)

On définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ les fonctions f et g par $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ et $g(t) = \frac{f(t)}{t}$.

A. Généralités

1. Prouver que f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $tf'(t) = g(t)$.
2. Montrer que g est prlongeable par continuité en 0 et que le prolongement est dérivable en 0.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+$, et tracer son graphe en utilisant $e^{-1} \simeq 0,36$.
4. Déterminer la primitive H de la fonction $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$ s'annulant en 1.
5. Soit $n \geq 3$, on considère l'équation $(E_n) : f(t) = \frac{t}{n}$, où $t \in \mathbb{R}^{+*}$.
   (a) En utilisant la question 3, montrer que (E_n) admet un unique solution dans $]0, 1[$, qu'on notera α_n, et une autre dans $]1, +\infty[$, notée β_n.
   (b) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones.
   (c) Est-il possible qu'une des suites converge vers un réel $l \neq 0$? En déduire leurs limites.

B. Fonctions définies par des intégrales.

On prolonge la fonction f à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$.

1. Montrer que l'application prolongée (toujours notée f) est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Donner la valeur de $f'(0)$, et vérifier que l'égalité de la question $A.1$ reste vraie pour $t = 0$.
2. Pour tout $x > 0$, on définit $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$ et $G(x) = \int_0^x g(t)\ dt$.
   (a) Justifier l'existence de ces intégrales qu'on ne cherchera pas à calculer, et prouver que $F(x) = xe^{-\frac{1}{x}} - G(x)$.
   (b) En séparant l'intégrale $G(x)$ en deux, montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall x \geq 1,\ 0 \leq G(x) \leq C + \ln(x)$.

(c) En déduire la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\dfrac{F(x)}{x}$.

3. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle $(E) : x^2y' + y = x^2$, en faisant apparaître la fonction F dans l'expression des solutions.

C. Étude qualitative d'une équation différentielle.

On considère une fonction y solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, et on note $u_n = y^{(n)}(0)$.

1. Que vaut $u_0 = y(0)$?
2. En dérivant (E), calculer $u_1 = y'(0)$ et $u_2 = y''(0)$.
3. Existe-t-il un polynôme de degré 2 solution de (E) ?
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, prouver à l'aide de la formule de Leibniz que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$.
5. Déterminer une expression de u_n à l'aide de factorielles.

Divertissement (pour ceux qui ont du temps).

Comme vous le savez tous, une fonction $f : \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bijective si tout réel admet un unique antécédent par f. On sait naturellement construire des fonctions bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues. Mais existe-til une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ pour laquelle tout réel admet exactement deux antécédents par f ? Si oui, donnez-en un exemple (un dessin suffit), sinon démontrer pourquoi. Même question pour trois antécédents. Généraliser au cas de n antécédents, pour un entier naturel n non nul.