Devoir Maison n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

24 janvier 2014

Algèbre

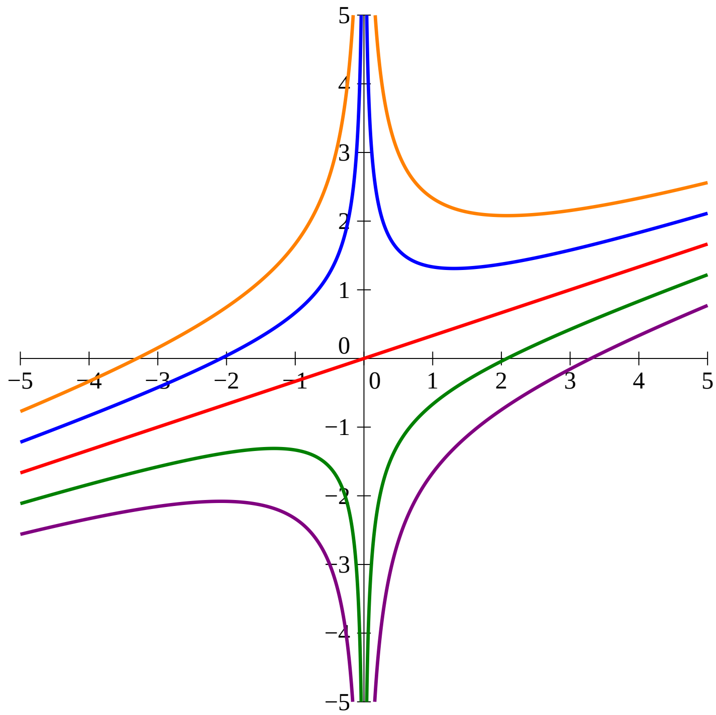
1. Je vous propose deux méthodes dans ce corrigé. La première, la plus simple, consiste à calculer les premières puissances de A, et essayer de repérer quelque chose. On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$, puis $A^2 = \begin{pmatrix} 31 & -30 \\ 15 & -14 \end{pmatrix}$. Bon, ça devrait suffire. Le coefficient en haut à gauche est toujours une puissance de 2 diminuée de 1, celui à sa droite est son opposé augmenté de 1, et les deux du bas sont les mêmes que ceux du haut dans la matrice précédente. Bref, on va prouver par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2-2^{n+1} \\ 2^n-1 & 2-2^n \end{pmatrix}$. On constate sans diffculté que cette propriété est vérifiée pour $n=0$, et en la supposant vraie au rang n, on calcule $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2-2^{n+1} \\ 2^n-1 & 2-2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2^{n+1}-3+2-2^{n+1} & -2^{n+2}+2 \\ 3\times 2^n-3+2-2^n & -2^{n+1}+2 \end{pmatrix} = A^2 = \begin{pmatrix} 2^{n+2}-1 & 2-2^{n+2} \\ 2^{n+1}-1 & 2-2^{n+1} \end{pmatrix}$, ce qui est exactement la forme attendue. La propriété est donc vraie pour tout entier n.
   Deuxième possibilité pour ceux qui adorent le binôme de Newton : écrire que $A = 2I + B$, avec $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. On constate que $B^2 = -B$, ce qui permet de prouver par une récurrence triviale que, $\forall k \geq 1$, $B^k = (-1)^{k+1}B$. Les matrice $2I$ et B commutant bien évidemment, on peut écrire $A^n = (B+2I)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I)^{n-k} = 2^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} 2^{n-k} B = 2^n I - ((2-1)^n - 2^n)B = 2^n I + (2^n-1)B$. Autrement dit, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^n-1 & 2-2^{n+1} \\ 2^n-2 & 2-2^{n+1} \end{pmatrix}$, ce qui donne bien la même formule que ci-dessus.
2. On constate tout simplement que $X_{n+1} = AX_n$ puisque cette égalité matricielle est équivalente aux deux équations $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ (première ligne) et $u_{n+1} = u_{n+1}$ (deuxième ligne). On peut alors prouver par récurrence que $X_n = A^n X_0$. C'est évidemment vrai au rang 0, et en le supposant vrai au rang n, on peut exploiter la relation constatée juste avant pour écrire $X_{n+1} = A \times X_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$.
3. On connait la matrice A^n, il ne reste plus qu'à calculer $A^n \times X_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2-2^{n+1} \\ 2^n-1 & 2-2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2^{n+1}-3+2-2^{n+1} \\ 3\times 2^n-3+2-2^n \end{pmatrix}$. Il suffit de garder la deuxième ligne pour obtenir $u_n = 2^{n+1} - 1$.

4. La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2-3x+2=0$, donc les deux racines évidentes sont $r_1=1$ et $r_2=2$. On peut donc écrire $u_n=A+2^nB$, avec $u_0=1=A+B$ et $u_1=3=A+2B$. En soustrayant les deux équations, on trouve $B=2$, puis $A=-1$, soit $u_n=2^{n+1}-1$. Oui, c'est nettement plus rapide que de s'embêter avec des matrices.

Analyse

On commence bien sûr par normaliser l'équation pour obtenir $y'+\dfrac{y}{2x}=\dfrac{1}{2}$, qu'on va résoudre séparément sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. L'équation homogène associée a pour solutions les fonctions y_h : $x\mapsto Ke^{-\frac{1}{2}\ln(x)}=\dfrac{K}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et de même les fonctions $x\mapsto\dfrac{L}{\sqrt{-x}}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$. On peut constater si on est réveillé que $y_p(x)=\dfrac{1}{3}x$ est une solution particulière quasi évidente, mais si on dort, on s'en sort grâce à la variation de la constante, en posant $y_p(x)=\dfrac{K(x)}{\sqrt{x}}$. On a alors $y_p'(x)=\dfrac{K'(x)\sqrt{x}-\frac{K(x)}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{2xK'(x)-K(x)}{2x^{\frac{3}{2}}}$, donc $y_p'(x)+\dfrac{y_p(x)}{2x}=\dfrac{2xK'(x)-K(x)}{2x^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{K(x)}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{K'(x)}{\sqrt{x}}$. Si on veut que ce soit égal à $\dfrac{1}{2}$, il faut $K'(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$, soit $K(x)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{2}=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, ce qui donne bien $y_p(x)=\dfrac{1}{3}x$. Les solutions complètes sont donc de la forme $y(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{K}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $y(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{L}{\sqrt{-x}}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$. Aucun recollement n'est possible sauf si $K=L=0$ (la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{3}x$ est évidemment solution sur $\mathbb{R}$) puisque toutes les autres solutions ont des limites infinies en 0.

Étudions donc les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$. On calcule $y'(x)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{K}{2x^{\frac{3}{2}}}$, cette dérivée s'annule une unique fois lorsque $x=\left(\dfrac{3K}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ si $K>0$, elle est toujours positive sinon. La valeur du minimum correspondant est ignoble et peu pratique pour aider au tracé de la courbe. Sur $\mathbb{R}^{-*}$, c'est essentiellement pareil, la fonction est croissante si $K>0$ et admet un maximum si $K>0$. Une allure de quelques courbes intégrales ci-dessous (en fait cet exercice est vraiment inintéressant au possible) :



Complexes

1. Quitte à multiplier par z, on se ramène à l'équation du second degré $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$, donc le discriminant vaut $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = 4(\cos^2(\theta) - 1) = -4\sin^2(\theta)$. Ce discriminant est toujours négatif (ou nul), et l'équation admet pour solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{2\cos(\theta) + 2i\sin(\theta)}{2} = e^{i\theta}$ et $z_2 = e^{-i\theta}$.

2. (a) En effectuant le changement de variable $Z = z^n$ (ou même sans l'effectuer), le calcul précède nous amène à résoudre $z^n = e^{i\theta}$ ou $z^n = e^{-i\theta}$. On obtient facilement $z = e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})} = \omega^k e^{i\frac{\theta}{n}}$ ou $z = e^{i(\frac{-\theta+2k\pi}{n})} = \omega^k e^{-i\frac{\theta}{n}}$, avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Les seules valeurs de θ pour lesquelles on peut retrouver deux fois la même solution sont celle pour lesquelles $\theta + 2k\pi = 2k'\pi - \theta$, ce qui suppose que θ est un multiple de π. Si $\theta = 0$, toutes les solutions apparaissent deux fois, on peut se contenter de garder les ω^k pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Si $\theta = \pi$, c'est pareil au signe près (les solutions sont les nombres $-\omega^k$).

   (b) Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation $\dfrac{z+i}{z-i} = \omega^k e^{i\frac{\theta}{n}}$, soit $z = -i \times \dfrac{1+\omega^k e^{i\frac{\theta}{n}}}{1-\omega^k e^{i\frac{\theta}{n}}}$. Par une superbe factorisation par l'angle moitié, on peut simplifier en $z = -i \times \dfrac{2\cos(\frac{k\pi}{n} + \frac{\theta}{2n})}{2i\sin(\frac{k\pi}{n} + \frac{\theta}{2n})} = -\dfrac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n} + \frac{\theta}{2n})}$. Les solutions restantes sont identiques, mais avec des signes moins devant tous les θ.

   Dans le cas particulier $\theta = 0$, on doit plus simplement résoudre $\dfrac{z+i}{z-i} = \omega^k$, soit $z = -i\dfrac{1+\omega^k}{1-\omega^k} = -\dfrac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n})}$, ce qui est valable pour $k \neq 0$ pour ne pas annuler le dénominateur.

Idem dans le cas particulier $\theta = \pi$ en changeant le signe.

Dénombrement

1. Il y a trois possibilités pour chacune des neuf cases, avec bien sûr des répétitions possibles, donc $3^9 = 19\ 683$ coloriages.
2. Il ne reste plus qu'à choisir la couleur de chacune des cinq cartes restantes, ce qui fait $3^5 = 243$ coloriages possibles.
3. Cette fois-ci on a neuf cases à colorier, mais seulement deux couleurs possibles, ce qui laisse $2^9 = 512$ coloriages.
4. Il faut donc choisir la couleur de chaque ligne, trois possiblités pour chaque avec toujours des répétitions possibles, donc $3^3 = 27$ coloriages.
5. On peut commencer par choisir où placer les trois cases rouges, ce qui se fait de $\binom{9}{3}$ façons différentes possibles. Ensuite, il restera $\binom{6}{3}$ possibilités pour les trois cases bleues, et on n'aura plus le choix pour les vertes. Cela fait $\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} = 1\ 680$ coloriages.
6. On peut colorier la case centrale de trois couleurs, chacune des quatre cases qui l'entourent de deux couleurs seulement (une fois choisie celle de la case centrale) et les quatre coins de trois couleurs, soit $3^5 \times 2^4 = 3\ 888$ coloriages possibles.