Devoir Maison n°6 : révisions

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 23 janvier 2013

Algèbre

On considère la suite réelle (mais oui, c'est bien l'exercice d'algèbre, attendez de voir les questions) (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Pour les trois premières questions de l'exercice, on n'utilisera aucune connaissance sur le type de suite que vous avez reconnu au premier coup d'oeil quand j'ai donné la relation de récurrence précédente.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les puissances de la matrice A (méthode au choix, c'est un DM, débrouillez-vous !).
2. En notant, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, exprimer la relation de récurrence définissant (u_n) sous forme d'une relation entre X_n, X_{n+1} et A. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$ (une preuve **rigoureuse** est attendue).
3. En déduire la valeur de u_n en fonction de n.
4. Quand même, pour ne pas perdre la main, retrouver cette expression par une méthode plus classique (au passage, ça vous permettra de vérifier vos calculs).

Analyse

On considère l'équation différentielle $2xy' + y = x$. Résoudre l'équation et tracer l'allure de quelques courbes intégrales (on commencera bien évidemment par étudier le plus précisément les solutions en question).

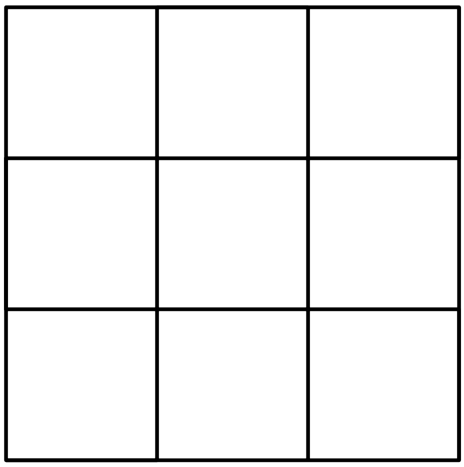
Complexes

On fixe pour tout l'exercice un nombre réel $\theta \in]-\pi, \pi]$. On pourra si on le souhaite noter $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos(\theta)$.
2. On chercher désormais à résoudre l'équation $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^n \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^n - 2\cos(\theta) = 0$.
   (a) Commencer par résoudre l'équation $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos(\theta)$, en vérifiant rigoureusement qu'on ne donne qu'une fois chaque solution.
   (b) Conclure en distinguant les deux cas particulier $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Dénombrement

Pour cet exercice, inutile d'avoir suivi un cours de dénombrement poussé, on peut s'en sortir avec peu de connaissances mais beaucoup de bon sens. Il sera quand même utile de savoir que $\binom{k}{n}$ (dont on rappelle par ailleurs que c'est égal à $\frac{n!}{k!(n-k)!}$) représente le nombre de façons de choisir k objet dans un ensemble en contenant n, l'ordre n'étant pas important.



On considère donc une grille de morpion (trois lignes, trois colonnes) dont on veut colorier chacune des cases en bleu, en vert ou en rouge (aucune case ne doit rester blanche). Combien y a-t-il de coloriages possibles respectant chacune des conditions suivantes :

1. Commençons simple : aucune condition.
2. Les quatre coins de la grille sont verts.
3. Aucune case de la grille n'est rouge.
4. Chaque ligne contient trois cases de la même couleur.
5. La grille contient trois cases vertes, trois rouges et trois bleues.
6. Aucune case adjacente à la case centrale n'est de la même couleur qu'elle (deux cases sont adjacentes si elles ont un côté en commun, en diagonale ça ne compte pas).