Devoir Maison n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

17 décembre 2013

Exercice 1

1. On calcule (a priori sans difficulté) $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.
2. Les -2 en-dehors de la diagonale forcent à prendre $\alpha = 2$. Comme $2A$ est une matrice ayant une diagonale de 4, il faut alors prendre $\beta = 3$ pour que les élémentes de la diagonale de $\alpha A + \beta I$ soient égaux à 7. On vérifie qu'en effet $A^2 = 2A + 3I$.
3. Notons donc P_n : $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$. La propriété P_0 est vraie, en posant $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$. Même si ça ne sert à rien pour la récurrence, notons que P_1 est aussi vraie en prenant $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 0$. Supposons désormais P_n vraie pour un certain entier n. On peut alors écrire $A^{n+1} = A \times A^n = A(\alpha_n A + \beta_n I) = \alpha_n A^2 + \beta_n A$. Ne reste plus qu'à utiliser la relation de la question précédente : $A^{n+1} = \alpha_n(2A + 3I) + \beta_n A = (2\alpha_n + \beta_n)A + 3\alpha_n I$. La propriété P_{n+1} est donc vérifiée, avec $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = 3\alpha_n$.
4. En effet, d'après les relations précédentes, $\alpha_{n+2} = 2\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 2\alpha_{n+1} + 3\alpha_n$. On reconnait bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 4 + 12 = 16$, et qui admet deux racines $r_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3$ et $r_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1$. Il existe donc deux réels a et b tels que $\alpha_n = a3^n + b(-1)^n$. À l'aide des deux premiers termes de la suite, on a $\alpha_0 = 0 = a + b$ et $\alpha_1 = 1 = 3a - b$, donc $b = -a$ et $4a = 1$, soit $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = -\dfrac{1}{4}$. Finalement, $\alpha_n = \dfrac{3^n - (-1)^n}{4}$.
5. Comme $\beta_{n+1} = 3\alpha_n$, on aura, pour $n \geq 1$, $\beta_n = 3\alpha_{n-1} = \dfrac{3^n + 3(-1)^n}{4}$. On constate que cette formule reste vraie pour $n = 0$, elle est donc valable pour tout entier n. Finalement, on obtient $A^n = \dfrac{3^n(A + I) + (-1)^n(3I - A)}{4}$ (on peut donner les coefficients si on le souhaite...).
6. On calcule sans difficulté $B^2 = -4B$ (matrice ne contenant que des coefficients égaux à -4), puis $B^3 = 16B$, et cela devrait suffire à conjecturer que $B^n = (-4)^{n-1}B$. Notons donc P_n cette proposition. La propriété P_1 est vraie (ça ne marche évidemment pas pour B^0) puisque $(-4)^0 B = B$. En supposant P_n vraie, on a alors $B^{n+1} = B \times B^n = B \times (-4)^{n-1}B = (-4)^{n-1}B^2 = (-4)^{n-1} \times (-4B) = (-4)^n B$, ce qui prouve P_n et achève la récurrence.
7. On peut remarquer que $A = B + 3I$, les matrices B et $3I$ commutant, on peut en effet applquer votre formule préférée (ne niez pas, je sais que vous adorez tous ce cher Newton) :

$A^n = (B+3I)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} B^k (3I)^{n-k}$. On isolera le terme numéro 0, pour lequel $B^k = I$, pour les autres on utilise la formule de la question précédente.

$A^n = 3^n I + \sum_{k=1}^{k=n} (-4)^{k-1} B 3^{n-k} I = 3^n I + (\sum_{k=1}^{k=n} (-4)^{k-1} 3^{n-k}) B = 3^n I - \frac{1}{4} (\sum_{k=1}^{k=n} (-4)^k 3^{n-k}) B = 3^n I - \frac{1}{4} ((\sum_{k=0}^{k=n} (-4)^k 3^{n-k}) B - 3^n B) = 3^n I + \frac{3^n}{4} B - \frac{(-1)^n}{4} B$.

Comme $B = A - 3I$, on peut réécrire ce résultat sous la forme $A^n = 3^n I + \frac{3^n}{4} A - \frac{3^{n+1}}{4} I - \frac{(-1)^n}{4} A + \frac{3(-1)^n}{4} I = \frac{3^n (4I + A - 3I) + (-1)^n (-A + 3I)}{4} = \frac{3^n (A + I) + (-1)^n (3I - A)}{4}$. On retrouve la même formule que précédemment (encore heureux).

Exercice 2

1. En effet, $1 + 0 + 0 = 0 + 1 + 0 = 0 + 0 + 1 = 1$ donc $I \in E$ et $s(I) = 1$; pour J les sommes sont toutes identiques et égales à $1 + 1 + 1$ donc $s(J) = 3$.
2. Il faut avoir $1 + x + y = 6 = x - 1 = x - 1 = x - 1 = y + 8$, ce qui donne $x = 7$ et $y = -2$. Toutes les équations sont alors bien vérifiées (et accessoirement $s(K) = 6$).
3. Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix}$, alors
$AB = \begin{pmatrix} a_1a'_1 + a_2b'_1 + a_3c'_1 & a_1a'_2 + a_2b'_2 + a_3c'_2 & a_1a'_3 + a_2b'_3 + a_3c'_3 \\ b_1a'_1 + b_2b'_1 + b_3c'_1 & b_1a'_2 + b_2b'_2 + b_3c'_2 & b_1a'_3 + b_2b'_3 + b_3c'_3 \\ c_1a'_1 + c_2b'_1 + c_3c'_1 & c_2a'_2 + c_2b'_2 + c_3c'_2 & c_3a'_3 + c_2b'_3 + c_3c'_3 \end{pmatrix}$
La somme des termes de la première ligne correspond exactement au développement de $(a_1 + a_2 + a_3)(a'_1 + b'_1 + c'_1) = s(A)s(B)$. Des calculs très similaires prouvent que les cinq autres sommes sont identiques.
4. (a) On calcule $AJ = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 & b_1 + b_2 + b_3 & b_1 + b_2 + b_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 & c_1 + c_2 + c_3 & c_1 + c_2 + c_3 \end{pmatrix}$. Similairement, $JA = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 & a_3 + b_3 + c_3 \\ a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 & a_3 + b_3 + c_3 \\ a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 & a_3 + b_3 + c_3 \end{pmatrix}$
   (b) Il suffit d'écrire l'égalité des neuf coefficients de AJ et JA pour constater qu'elles se ramènent aux égalités des six sommes du début de l'énoncé.
   (c) Dans le cas où $A \in E$, chacun des coefficients de AJ correspondant à l'une des six sommes égales à $s(A)$, on a $AJ = \begin{pmatrix} s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \end{pmatrix} = s(A)J$.
5. Si A est inversible, on peut multiplier l'égalité $AJ = s(A)J$ à gauche par A^{-1} pour obtenir $J = s(A)A^{-1}J$. De même, comme $AJ = JA$, on aura $J = JAA^{-1} = AJA^{-1} = s(A)JA^{-1}$. Autrement dit, $A^{-1}J = JA^{-1} = \frac{1}{s(A)}J$ (ici, $s(A)$ ne peut être nul sinon au vu des relations

obtenues on aurait $J = 0$, ce qui n'est manifestement pas le cas). La caractérisation des matrices de E vue précédemment permet alors d'affirmer que $A^{-1} \in E$, et que $s(A^{-1}) = \dfrac{1}{s(A)}$.

6. (a) Calculons $JB = \dfrac{1}{3}s(A)J^2$, et $\dfrac{1}{3}BJ = s(A)J^2$. Les deux matrices sont égales, donc $B \in E$.

   (b) On a $BC = BA - B^2 = \dfrac{1}{3}s(A)JA - \dfrac{1}{9}s(A)^2J^2 = \dfrac{1}{3}s(A)^2J - \dfrac{1}{3}s(A)^2J^2$. Comme $J^2 = 3J$, on a $BC = \dfrac{1}{3}s(A)^2J - \dfrac{1}{3}s(A)^2J = 0$. De même, $CB = 0$.

   (c) On vient de voir que B et C commutent, on peut donc écrire, en utilisant la formule du binome de Newton, que $(B+C)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} B^k C^{n-k}$. Dans cette somme, seuls le premier et le dernier terme sont non nuls (dans tous les autres, on a un produit BC qui est nul), donc $(B+C)^n = B^n + C^n$. Comme $C = A - B$, cela donne $(B + A - B)^n = B^n + (A-B)^n$, ou encore $(A-B)^n = A^n - B^n$.

   (d) On a $A = B + C$, où B est proportionnelle à J. Reste donc à vérifier que $C \in F$. En effet, $CJ = AJ - BJ = s(A)J - \dfrac{1}{3}s(A)J^2 = s(A)J - s(A)J = 0$, de même pour JA. La matrice C est donc bien dans E, avec $s(C) = 0$. Autrement dit, $C \in F$.