Devoir Maison n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

4 novembre 2013

Exercice 1

1. On va bien entendu procéder par identification :
$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}+\frac{d}{k+3}$$
$$= \frac{a(k+1)(k+2)(k+3)+bk(k+2)(k+3)+ck(k+1)(k+3)+dk(k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{a(k^3+6k^2+11k+6)+b(k^3+5k^2+6k)+c(k^3+4k^2+3k)+d(k^3+3k^2+2k)}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{(a+b+c+d)k^3+(6a+5b+4c+3d)k^2+(11a+6b+3c2d)k+6a}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$
Si on veut que l'égalité de l'énoncé soit vérifiée, on doit donc avoir $a=\frac{1}{6}$, puis $b+c+d=-a=-\frac{1}{6}$; $5b+4c+3d=-6a=-1$ et $6b+3c+2d=-11a=-\frac{11}{6}$. La soustraction des deux premières équations donne $4b+3c+2d=-\frac{5}{6}$, ce qu'on peut soustraire à la troisième équation pour avoir $2b=-\frac{11}{6}+\frac{5}{6}=-1$, soit $b=-\frac{1}{2}$. La première équation devient alors $c+d=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$, et la deuxième $4c+3d=-1+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$. On a donc $d=\frac{1}{3}-c$, d'où $4c+1-3c=\frac{3}{2}$, soit $c=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$. Enfin, $d=\frac{1}{3}-c=-\frac{1}{6}$. Conclusion de ce superbe calcul : $\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{6k}-\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{6(k+3)}$.

2. Il ne reste plus qu'à faire un beau calcul de somme télescopique : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6k}-\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{6(k+3)}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}-\frac{1}{6}\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k}=\frac{1}{6}\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}-\frac{1}{2}\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2}\sum_{k=4}^{n}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}-\frac{1}{6}\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{6(n+1)}-\frac{1}{6(n+2)}-\frac{1}{6(n+3)}$
$=\frac{1}{18}+\frac{1}{3(n+2)}-\frac{1}{6(n+1)}-\frac{1}{6(n+3)}=\frac{1}{18}+\frac{2(n+1)(n+3)-(n+2)(n+3)-(n+1)(n+2)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{18}+\frac{2n^2+8n+6-n^2-5n-6-n^2-3n-2}{6(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$.

3. Notons donc P_n la propriété : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$.
Pour $n=1$, le membre de gauche vaut $\frac{1}{24}$, et celui de droite vaut $\frac{1}{18}-\frac{1}{72}=\frac{1}{24}$, l'initialisation est faite. En supposant P_n vérifiée, on peut alors écrire (même technique que

pour tous les calculs de sommes) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{18} + \frac{-(n+4)+3}{3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+2)(n+3)(n+4)}$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 2

1. (a) On doit donc résoudre l'équation $f(z) = z$, c'est-à-dire $z = 2z(1-z)$, ou encore $z(1-2+2z) = 0$. On trouve donc deux valeurs possibles : $z = 0$ et $z = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Commençons par résoudre $f(z) = -4$, soit $-2z^2 + 2z + 4 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4 + 32 = 36$, et admet deux racines $z_1 = \dfrac{-2+6}{-4} = -1$, et $z_2 = \dfrac{-2-6}{-4} = 2$.

   Passons à $f(z) = 2 + 2i$, qui donne $-2z^2 + 2z - 2 - i = 0$, qu'on peut écrire plus simplement $z^2 - z + 1 + i = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i$. Cherchons $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, on obtient les deux équations $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = -4$. On peut ajouter la condition sur le module $a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5$. En additionnant et soustrayant comme d'habitude, $2a^2 = 2$, soit $a = \pm 1$ et $2b^2 = 8$, soit $b = \pm 2$. Comme a et b doivent être de signe contraire, on peut prendre $\delta = 1 - 2i$. On obtient alors comme antécédents $z_1 = \dfrac{1+1-2i}{2} = 1 - i$, et $z_2 = \dfrac{1-1+2i}{2} = i$.

2. Examinons la condition $f(z_1) = f(z_2)$: $2z_1 - 2z_1^2 = 2z_2 - 2z_2^2$, soit en divisant tout par deux $z_1 - z_2 = z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$. Si on exclut le cas peu intéressant $z_1 = z_2$, on peut diviser par $z_1 - z_2$ pour obtenir $1 = z_1 + z_2$, soit $z_2 = 1 - z_1$. Autrement dit, $z_2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - z_1$, ce qui signifie que les points d'affixe z_1 et z_2 sont symétriques par rapport au point d'affixe $\dfrac{1}{2}$. En particulier, l'application n'est pas injective puisque, sauf dans l'unique cas particulier $z = \dfrac{1}{2}$, il existe toujours un deuxième nombre complexe ayant la même image par f qu'un nombre complexe donné. Pour faire très simple, on peut d'ailleurs se contenter de reprendre le résultat de la première question, et dire que $f(-1) = f(2)$.

3. L'équation $f(z) = a$, où $a \in \mathbb{C}$, est une équation de second degré, elle aura toujours des solutions. Tout nombre complexe a donc au moins un antécédent par f. Le nombre a aura un seul antécédent si l'équation $2z - 2z^2 = a$ a un discriminant nul, soit $4 - 8a = 0$, donc $a = \dfrac{1}{2}$. Le nombre réel $\dfrac{1}{2}$ est donc le seul à avoir un unique antécédent (en l'occurence lui-même).

4. (a) Calculer l'image de l'axe réel est étrangement plus compliqué que pour image réciproque (question suivante), si $x \in \mathbb{R}$, on a toujours $f(x) = 2x(1-x) \in \mathbb{R}$. Pour déterminer précisément quelles sont les valeurs prises par cette fonction, on peut l'étudier avec les techniques classiques sur les fonctions d'une variable réelle. Ainsi, $f'(x) = -4x + 2$ s'annule en $x = \dfrac{1}{2}$, comme $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, on obtient pour f le tableau de variations suivant :

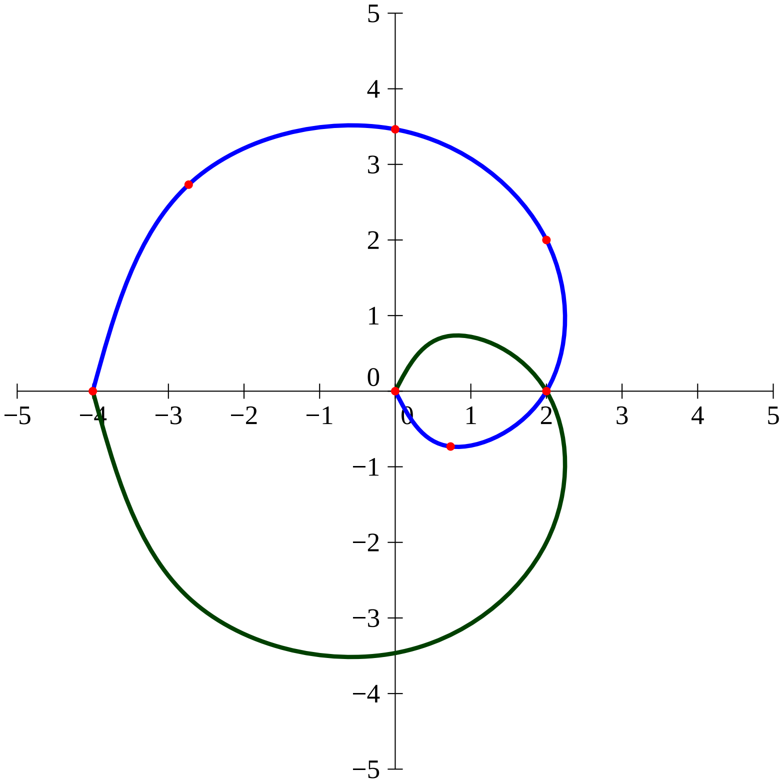
$$
\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & \frac{1}{2} & & +\infty \\
\hline
 & & & \frac{1}{2} & & \\
f & & \nearrow & & \searrow & \\
 & -\infty & & & & -\infty \\
\hline
\end{array}
$$

La fonction f prend donc sur l'axe réel toutes les valeurs réelles inférieures à $-\frac{1}{2}$. Autrement dit, $f(\mathbb{R}) = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

(b) Allons-y peu subtilement. Si on pose $z = a + ib$, on a $f(z) = 2(a + ib)(1 - a - ib) = 2(a - a^2 - iab + ib - iab + b^2)$, qui est réel si $b - 2ab = 0$, soit $b(1 - 2a) = 0$. On peut donc avoir $b = 0$ (c'est-à-dire que z est un réel), ou $a = \frac{1}{2}$ (droite parallèle à l'axe imaginaire).

5. (a) Calculons $f(e^{i\theta}) = 2e^{i\theta}(1 - e^{i\theta}) = 2e^{i\theta}e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2e^{i\frac{3\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ $= 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{3\theta}{2}} = 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{3\theta-\pi}{2}}$. En particulier, on trouve un module égal à $4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (en prenant $\theta \in [0; 2\pi]$ pour toujours avoir un sinus de l'angle moitié positif) et un argument de $\frac{3\theta - \pi}{2}$.

(b) Pour $\theta = 0$, $f(e^{i\theta}) = f(1) = 0$; pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, le module vaut $4\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ et l'argument $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = -\frac{\pi}{4}$. On peut aussi calculer directement $f(e^{i\frac{\pi}{6}}) = \sqrt{3} - 1 + i(1 - \sqrt{3})$. Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, on a un module $4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$, et un argument de $\frac{1}{2}(\pi - \pi) = 0$, donc $f(e^{i\frac{\pi}{3}}) = 2$. Ensuite, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, module $2\sqrt{2}$ et argument $\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right) = \frac{\pi}{4}$, donc $f(e^{i\theta}) = 2 + 2i$. On enchaine avec $\theta = \frac{2\pi}{3}$, module $2\sqrt{3}$, argument $\frac{1}{2}(2\pi - \pi) = \frac{\pi}{2}$, soit $f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 2\sqrt{3}i$. Pour $\theta = \frac{5\pi}{6}$, module $\sqrt{6} + \sqrt{2}$, argument $\frac{1}{2}\left(\frac{15\pi}{6} - \pi\right) = \frac{3\pi}{4}$, soit $f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = -\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)$. Enfin, pour $\theta = \pi$, $f(-1) = -4$. Ce qui donne une allure ressemblant à ceci (les points sont en rouge, la courbe en bleu, ça doit ressembler à une sorte de spirale, en vert la symétrique pour l'autre moitié de cercle trigonométrique) :



(c) Il suffit de calculer $f(e^{i(2\pi-\theta)})$: le module est le même que pour $f(e^{i\theta})$, l'argument vaut $\dfrac{3(2\pi-\theta)-\pi}{2} = \dfrac{5\pi-3\theta}{2} = -\dfrac{3\theta-\pi}{2} + 2\pi$, donc l'argument est opposé à celui de $f(e^{i\theta})$. Autrement dit, les images des points situés en bas du cercle trigonométrique sont les conjugués des images des points du haut. Il suffit donc de faire une symétrie par rapport à l'axe réel pour obtenir la deuxième moitié de l'image du cercle trigonométrique.